



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ  
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
4. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτευτείται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
5. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
6. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
7. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. και δεν προβλέπεται Αναβαθμολόγηση (διότι γίνεται εσωτερικά).
8. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **24 Φεβρουαρίου 2007** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στη **24<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ρόδος, 26 Απριλίου – 2 Μαΐου 2007)**, στην **11<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Βουλγαρία, Ιούνιος 2007)** και στην **48η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Βιετνάμ, Ιούλιος 2007)**.
9. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

**10. Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ μαζί με τα γραπτά να μας στείλει το ονοματεπώνυμο και την ταχυδρομική διεύθυνση όλων των επιτηρητών για να τους σταλεί ονομαστική ευχαριστήρια επιστολή από το Δ.Σ. της ΕΜΕ.**

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος  
Καθηγητής Θεόδωρος Εξαρχάκος

Ο Γενικός Γραμματέας  
Ιωάννης Τυρλής



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς  $\nu$  που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός

$$\frac{42}{2\nu + 1} \text{ να είναι ακέραιος.}$$

2. Θεωρούμε οξεία γωνία  $\widehat{AOB}$  και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία  $OD \perp OA$  και ευθεία  $OE \perp OB$ . Αν είναι  $\widehat{GOE} = 4\widehat{AOB}$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{AOB}$ .

3. Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε  $(\gamma - \delta)(\gamma + \delta) \neq 0$  και

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} + \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma - \delta} + \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \delta},$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ισούται με 0.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής  $xyzxyz$ , όπου  $x, y, z$  είναι ψηφία με  $x \neq 0$  διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία*



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός  $A = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^4 \cdot 7^2$ . Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο  $A$  και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.
2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς  $x, y, z$  που είναι τέτοιοι ώστε:  
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}$$
3. Έστω  $M$  σημείο της βάσης  $B\Gamma$  ισοπλεύρου τριγώνου  $AB\Gamma$  με  $AB=6$ . Αν είναι  $MK \perp AB$ ,  $ML \perp A\Gamma$  και  $K_1\Lambda_1$  είναι η προβολή του  $K\Lambda$  στη  $B\Gamma$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου  $KK_1\Lambda_1\Lambda$ .
4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία*



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  με  $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$  και η παράσταση

$$K = \frac{\alpha|\delta - \gamma| + \alpha|\delta - \varepsilon| + \varepsilon|\beta - \alpha| + \varepsilon|\beta - \gamma|}{|\beta - \alpha| + |\beta - \gamma| + |\delta - \gamma| + |\delta - \varepsilon|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι:  $\beta < K < \delta$ .

(ii) Αν είναι

$$x = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta), y = (\alpha + \gamma)(\beta + \delta), z = (\alpha + \delta)(\beta + \gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς  $x, y, z$ .

2. Στο εσωτερικό τριγώνου  $AB\Gamma$  υπάρχει σημείο  $M$  τέτοιο ώστε  $\widehat{MB\Gamma} = \widehat{M\Gamma B}$  και πάνω στις  $MB$  και  $M\Gamma$  υπάρχουν σημεία  $\Delta$  και  $E$ , αντίστοιχα, έτσι ώστε  $A\Delta = AE$  και  $\widehat{MA\Delta} = \widehat{MAE}$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι  $x, y > 0$  και  $x^3 + y^2 \leq 64$ , να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^3 < 512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 ακριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$  με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  έχει τις πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2,$  και  $x_3$  που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)$$

συναρτήσει των  $\kappa, \lambda$ .

2. Θεωρούμε τόξο  $\widehat{AB} = 90^\circ$  και προεκτείνουμε τη χορδή AB κατά ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma = AB$ . Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου  $\widehat{AB}$  από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:  $KB = 2KA$ .

3. Αν  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha + \beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta.$$

4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι  $MK = x,$   $ML = y,$  να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν  $\log_{150} 2 = x$ ,  $\log_{150} 3 = y$  τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 50^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$  με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  έχει τις πραγματικές ρίζες  $x_1$ ,  $x_2$ , και  $x_3$  που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = (1 + x_1^2)(1 + x_2^2)(1 + x_3^2)$$

συναρτήσει των  $\kappa, \lambda$ .

3. Να λύσετε στο  $\mathbb{R}$  την εξίσωση:

$$\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}} = \frac{2x^3+1}{3}$$

4. Αν  $I$  είναι το έγκεντρο τριγώνου  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma=2$  και  $\widehat{BA\Gamma} = 60^\circ$ , να αποδείξετε ότι:

$$IA + IB + I\Gamma \leq 2\sqrt{3}$$