ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2$, $\mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8$, όπου $x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{AB}$) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του AH και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$.

(α) Αν $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους AH, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A}\Gamma\Gamma'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^{4}\right]^{3}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β, ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0,\ xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β , αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37\,.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α . Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{Z\Delta}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A\Lambda}\perp\mathrm{EZ}$. ***Μονάδες 3***

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α . ***Μονάδες 2***

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc}=100a+10b+c$, όπου a,b,c ψηφία με $a\neq 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2$$
$$ax - y = 2a,$$

έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = 6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$. ***Μονάδες 4***

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$. ***Μονάδες 1***

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ , ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x+6$, $g(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}$, και τον άξονα των x ισούται με 3. ***Μονάδες 5***

Πρόβλημα 2

Έστω H το ορθόκεντρο και O το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, E και Z τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}, \text{ με } \lambda > 1.$$

Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το H τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta\left(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H}\right)$ και $C_\gamma\left(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H}\right)$ ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \Gamma_1$ και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού n, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ***Μονάδες 5***

Πρόβλημα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\left(f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\right)$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση:

$$f\left(f\left(f(x)\right) - f(y)\right) = f(x) - f\left(f(y)\right),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ