ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 .$$

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right)$$

Λύση
(α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 = 2010 + 2008 \cdot (2010 - 2009)$$
$$= 2010 + 2008 \cdot 1 = 2010 + 2008 = 4018.$$

(β) Έχουμε

$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{48 - 9 - 8}{12} \right) = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 12} = \frac{31}{32}$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22} .$$

Επειδή ισχύει ότι:

$$\mathrm{B} - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{31 \cdot 22 - 32 \cdot 21}{32 \cdot 22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{32 \cdot 22} > 0 ,$$

έπεται ότι είναι $\mathrm{B} > \Gamma$.

Πρόβλημα 2
Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

Λύση
Ο ακέραιος που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και μονάδων είναι ο $y = 100\gamma + 10\beta + \alpha$ και, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, ισχύει ότι:

$$x-y=297 \Leftrightarrow (100\alpha+10\beta+\gamma)-(100\gamma+10\beta+\alpha)=297$$
$$\Leftrightarrow 99(\alpha-\gamma)=297 \Leftrightarrow \alpha-\gamma=3.$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τα ψηφία α και γ είναι:

$\alpha=3,\gamma=0$ ή $\alpha=4,\gamma=1$ ή $\alpha=5,\gamma=2$ ή $\alpha=6,\gamma=3$ ή $\alpha=7,\gamma=4$ ή $\alpha=8,\gamma=5$ ή $\alpha=9,\gamma=6$.

Επειδή από την υπόθεση δίνεται ότι $\alpha+\beta+\gamma=10$, οι ζητούμενοι ακέραιοι $x=\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι οι:

370, 451, 532, 613.

Πρόβλημα 3

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $\mathrm{AB}=x$ μέτρα και μήκος $\mathrm{B\Gamma}=y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Λύση

Μετά την αύξηση κατά 25% το πλάτος του ορθογωνίου γίνεται $x_1=x+\frac{25x}{100}=\frac{125x}{100}=\frac{5x}{4}$.

Έστω ότι πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά $\alpha\%$, έτσι ώστε να μείνει το εμβαδό του αμετάβλητο. Τότε το μήκος του θα γίνει:

$$y_1=y-\frac{\alpha y}{100}=\frac{(100-\alpha)y}{100}=\frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100},$$

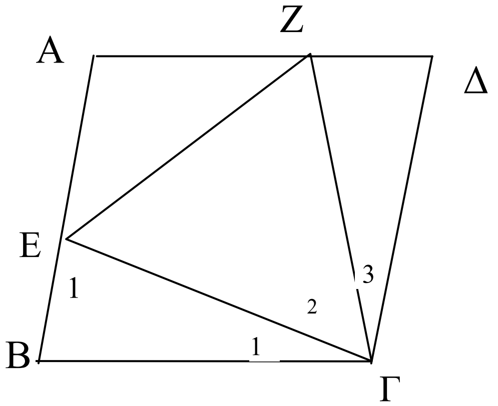
ενώ θα ισχύει η ισότητα

$$xy=x_1y_1 \Leftrightarrow x\cdot 2x=\frac{5x}{4}\cdot\frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100} \Leftrightarrow 2x^2=\frac{100-\alpha}{80}\cdot 2x^2$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{100-\alpha}{80}\right)\cdot 2x^2=0 \Leftrightarrow 1-\frac{100-\alpha}{80}=0 \ \ (\text{αφού}\, x\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow 80-100+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=20.$$

Άρα πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 20%.

Πρόβλημα 4.

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.



Σχήμα 1

Λύση

Επειδή είναι ΒΓ = ΓΕ = α, το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{E}}_1 \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta$ και η ΕΓ είναι τέμνουσα των ΑΒ και ΓΔ έχουμε ότι:

$$\hat{E}_1 = E\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 60^\circ + \hat{\Gamma}_3\,, \qquad (2)$$

αφού κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.
Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΖΔ με ίσες πλευρές ΒΓ = ΓΖ=α, ΓΕ = ΓΔ = α , προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^0 - 2\hat{B} = 180^0 - 2\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_3\,, \qquad (3)$$

αφού οι απέναντι γωνίες ρόμβου είναι ίσες,
Από την παραλληλία των πλευρών ΑΒ και ΓΔ έχουμε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{\Gamma}_1 + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^0 \quad \text{(λόγω της (1))}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + 2\cdot\left(60^\circ + \hat{\Gamma}_1\right) = 180^0 \quad \text{(λόγω της (2))}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\hat{\Gamma}_1 + 120^0 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 20^0.$$

Άρα είναι:

$$\hat{B} = \frac{180^0 - 20^0}{2} = 80^0,\ \hat{\Delta} = \hat{B} = 80^0 \ \text{ και } \ \hat{A} = \hat{\Gamma} = 180^0 - 80^0 = 100^0.$$

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Έστω ο ακέραιος

$$\mathrm{A}=\left[(-1)^{\nu}+(-1)^{2\nu}+(-1)^{3\nu}+(-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left[(-1)^{\nu}+(-1)^{2\nu}+(-1)^{3\nu}+(-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu=\left[(-1)^{\nu}+1+\left((-1)^{3}\right)^{\nu}+1\right]\cdot\nu$$

$$=\left[2+2\cdot(-1)^{\nu}\right]\cdot\nu=\begin{cases}4\nu, \text{ αν } \nu \text{ άρτιος}\\ 0, \text{ αν } \nu \text{ περιττός.}\end{cases}$$

Επειδή ο ακέραιος Α είναι διαιρέτης του 24, έπεται ότι:

- $\mathrm{A}\neq 0$, οπότε ο ν δεν μπορεί να είναι περιττός.
- Ο θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=4\nu$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος, ανήκει στο σύνολο των άρτιων θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή είναι:

$$4\nu\in\{2,4,6,8,12,24\}, \text{ όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu\in\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,3,6\right\}, \text{όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu=2 \text{ ή } \nu=6.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του ν είναι το 2 και το 6.

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Λύση

Ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος $N=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$10a+b=ab-(a+b)\Leftrightarrow 11a=ab-2b\Leftrightarrow (11-b)a=-2b.$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί ο όρος $(11-b)a$ του πρώτου μέλους είναι θετικός, ενώ ο όρος του δευτέρου μέλους είναι μικρότερος ή ίσος με το μηδέν. Άρα δεν υπάρχει ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 3

Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S=1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\cdots+997^2-998^2-999^2+1000^2.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα S είναι άθροισμα 250 αθροισμάτων της μορφής

$$S_k=(4k+1)^2-(4k+2)^2-(4k+3)^2+(4k+4)^2, \text{ για } k=0,1,2,3,...,249.$$

Όμως έχουμε

$$
\begin{aligned}
S_k &= (4k+1)^2-(4k+2)^2-(4k+3)^2+(4k+4)^2 \\
&= 16k^2+8k+1-16k^2-16k-4-16k^2-24k-9+16k^2+32k+16 \\
&= 4, \text{ για κάθε } k=0,1,2,3,...,249.
\end{aligned}
$$

Άρα έχουμε

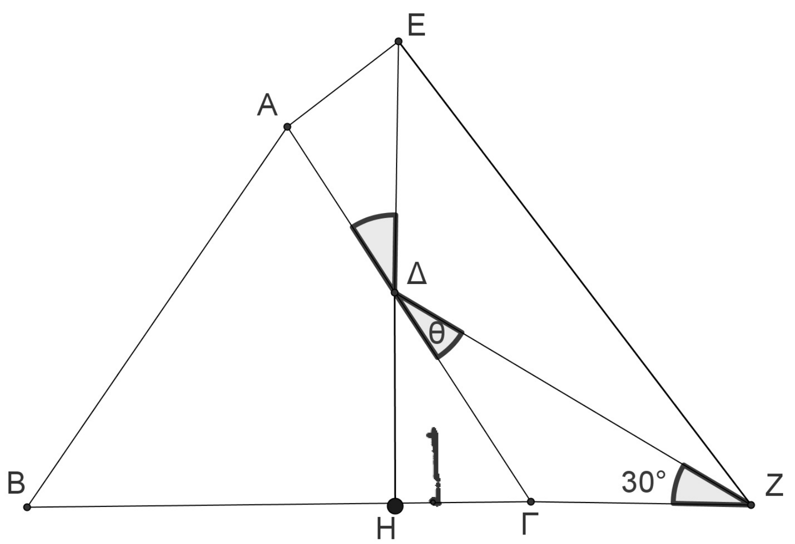
$$S = S_0+S_1+...+S_{249} = 4+4+...4 = 250\cdot 4 = 1000$$

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι: το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\text{ΑΓ}=\beta$ του τριγώνου ΑΒΓ, $\Delta\hat{\text{Α}}\text{Ε}=90^\circ$, η ΔΕ είναι κάθετη προς τη ΒΓ, $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=\Gamma\hat{\Delta}\text{Ζ}=\theta$ και $\Gamma\hat{\text{Ζ}}\Delta=30^0$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ.

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β.



Σχήμα 2

Λύση

(i) Έστω ότι η ευθεία ΔΕ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Τότε θα είναι

$$\text{Η}\hat{\Delta}\Gamma=\theta \text{ (ως κατά κορυφή) και } \text{Η}\hat{\Delta}\text{Ζ}=\text{Η}\hat{\Delta}\Gamma+\Gamma\hat{\Delta}\text{Ζ}=2\theta,$$

οπότε από το τρίγωνο ΗΔΖ έχουμε:

$$90^\circ+2\theta+30^0=180^0 \Leftrightarrow \theta=30^0$$

(ii) Το τρίγωνο ΗΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΕΖ, οπότε για τον υπολογισμό της ΕΖ θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρέπει όμως να έχουμε υπολογίσει τις κάθετες πλευρές ΗΖ και ΗΕ συναρτήσει του β.

Από το τρίγωνο ΗΔΓ που είναι ορθογώνιο στο Η με $\Gamma\Delta=\dfrac{\beta}{2}$ και έχει $\text{Η}\hat{\Delta}\Gamma=\theta=30^0$ λαμβάνουμε:

$$\text{Η}\Delta=\Delta\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu 30^0=\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\beta\sqrt{3}}{4} \text{ και } \text{Η}\Gamma=\Delta\Gamma\cdot\eta\mu 30^0=\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\beta}{4}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΗΔ και ΗΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΔΓ με $\text{Η}\hat{\Delta}\Gamma=\theta=30^0$, οπότε η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία των 30^0 θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή είναι $\text{Η}\Gamma=\dfrac{\beta}{4}$ και στη συνέχεια από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε και την πλευρά $\text{Η}\Delta=\dfrac{\beta\sqrt{3}}{4}$.

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta Z$ είναι ισοσκελές ($\Gamma\hat{Z}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}Z = 30^0$), οπότε θα είναι $\Gamma Z = \Gamma\Delta = \dfrac{\beta}{2}$ και

$$HZ = H\Gamma + \Gamma Z = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{4}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ με $\Delta\hat{A}E = 90^\circ$, $A\hat{\Delta}E = 30^0$ και $A\Delta = \dfrac{\beta}{2}$, έχουμε:

$$A\Delta = \frac{\Delta E}{\sigma\upsilon\nu 30^0} = \frac{\beta/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{3},$$

οπότε θα είναι

$$HE = H\Delta + \Delta E = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta\sqrt{3}}{3} = \frac{7\beta\sqrt{3}}{12}.$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο HEZ με $\hat{H} = 90^\circ$ έχουμε:

$$EZ = \sqrt{HE^2 + HZ^2} = \sqrt{\left(\frac{7\beta\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2} = \frac{\beta\sqrt{57}}{6}.$$

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Για $\alpha=0$ είναι $\mathrm{A}=0,$ ρητός. Έστω $\alpha\neq 0$. Αν ήταν ο $\mathrm{A}=\alpha\sqrt{3}$ ρητός, τότε ο αριθμός $\frac{\mathrm{A}}{\alpha}=\sqrt{3}$, θα ήταν επίσης ρητός, ως πηλίκο δύο ρητών αριθμών, που είναι άτοπο.

Επομένως, ο αριθμός Α είναι ρητός μόνο για $\alpha=0$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{B}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2=4+2\sqrt{3}$. Αν ο αριθμός Β ήταν ρητός, τότε ο αριθμός $\mathrm{B}-4=2\sqrt{3}$ θα ήταν επίσης ρητός, ως διαφορά δύο ρητών, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1-2|x|=\alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση

Επειδή στην εξίσωση εμφανίζεται η απόλυτη τιμή του αγνώστου x διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω $x\geq 0$.

Τότε ισχύει $|x|=x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1-2x=\alpha x, x\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)x=1, x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha+1}, & \text{αν } \alpha>-1 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha\leq -1. \end{cases}$$

(ii) Έστω $x<0$.

Τότε ισχύει $|x|=-x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1+2x=\alpha x, x<0 \Leftrightarrow (\alpha-3)x=1, x<0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha-3}, & \text{αν } \alpha<3 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha\geq 3. \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση. Η εξίσωση έχει 2 πραγματικές λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους, αν ισχύει: $-1<\alpha<3$.

Πράγματι, για $-1<\alpha<3$ η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_1=\frac{1}{\alpha-3}<0$ και $x_2=\frac{1}{\alpha+1}>0$ που είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1,B_1,C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A,B,C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC,AC,AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2 αντίστοιχα και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1, A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2.

Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν

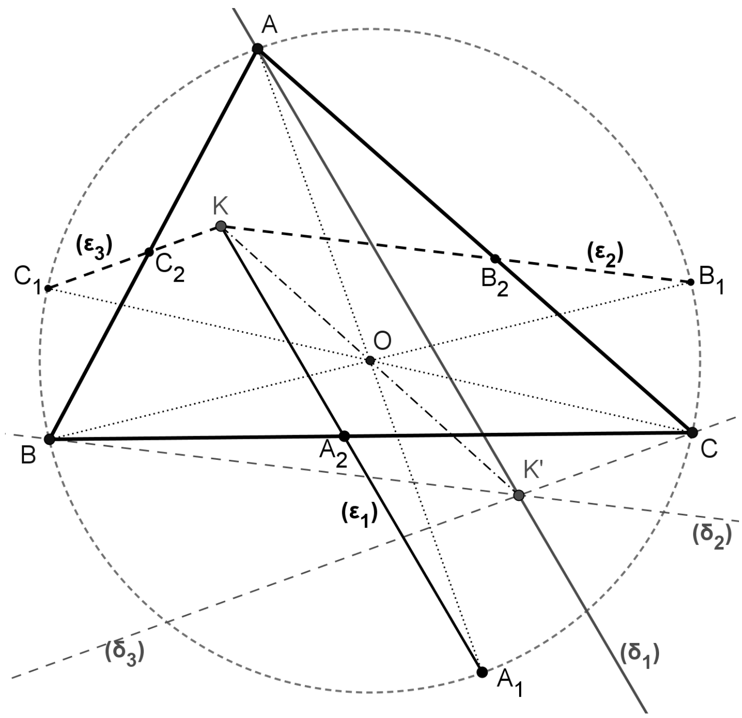
Λύση

Οι ευθείες (ε_1) και (δ_1) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της AA_1.

Οι ευθείες (ε_2) και (δ_2) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της BB_1.

Οι ευθείες (ε_3) και (δ_3) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της CC_1.

Σύμφωνα με τη θεωρία, αν περιστρέψουμε μία ευθεία κατά 180^0 γύρω από το κέντρο συμμετρίας, τότε αυτή θα συμπέσει με τη συμμετρική της ευθεία , ως προς κέντρο το σημείο O. Επομένως, οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) συντρέχουν, έστω στο σημείο K, αν, και μόνο αν, οι ευθείες (δ_1), (δ_2) και (δ_3) συντρέχουν στο σημείο K', που είναι το συμμετρικό του σημείου K ως προς το σημείο O.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Το σημείο K ταυτίζεται με το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC, αν, και μόνο αν, τα σημεία A_2, B_2, C_2 είναι τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα.

Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή πρόταση:

“*Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τα μέσα των πλευρών τριγώνου, βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο του κύκλο και είναι αντιδιαμετρικά των κορυφών του*”

Πρόβλημα 4
Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$
$$x^2 y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z.
(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Λύση
Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη ισότητα επί 3 και την αφαιρούμε από την πρώτη, οπότε λαμβάνουμε

$$(x-y)^3 = 8z^3 \Leftrightarrow x - y = 2z. \quad (1)$$

Τότε η δεύτερη ισότητα γίνεται:

$$2zxy = 6z^3, \quad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε η (2) είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$xy = 3z^2, \quad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η σχέση

$$x(x-2z) = 3z^2 \Leftrightarrow x^2 - 2zx - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3z \text{ ή } x = -z,$$

οπότε θα είναι

$$x = 3z, y = z \text{ ή } x = -z, y = -3z.$$

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ή } x = y = 0,$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$x = y, \text{ ανεξάρτητα από το } z.$$

(β) Για $x = 3z, y = z$ η εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ γίνεται $8z = 8 \Leftrightarrow z = 1$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (3,1,1)$, ενώ για $x = -z, y = -3z$, η εξίσωση γίνεται $-4z = 8 \Leftrightarrow z = -2$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (2, 6, -2)$.
Για $z = 0$, είναι $x = y$, οπότε από την εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ προκύπτει ότι

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right).$$

Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$x^3 + y^3 = 65z^3$$
$$x^2 y + xy^2 = 20z^3$$
$$x - y + 2z = 10.$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 3 και την προσθέτουμε στην πρώτη, οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση

$$(x+y)^3 = 125z^3 \Leftrightarrow x + y = 5z\,. \tag{1}$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$5zxy = 20z^3, \tag{2}$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω $z \neq 0$.

Τότε από την εξίσωση (2) λαμβάνουμε:

$$xy = 4z^2. \tag{3}$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η εξίσωση

$$x(5z - x) = 4z^2 \Leftrightarrow x^2 - 5zx + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4z \text{ ή } x = z\,,$$

οπότε θα είναι

$$x = 4z, y = z \text{ ή } x = z, y = 4z\,.$$

Για $x = 4z, y = z$ η τρίτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $5z = 10 \Leftrightarrow z = 2$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x, y, z) = (8, 2, 2)$, ενώ για $x = z,\ y = 4z$ η τρίτη εξίσωση γίνεται $-z = 10 \Leftrightarrow z = -10$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x, y, z) = (-10, -40, -10)$.

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\ xy(x+y) = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ ή } x = y = 0 \Leftrightarrow x = -y\,,$$

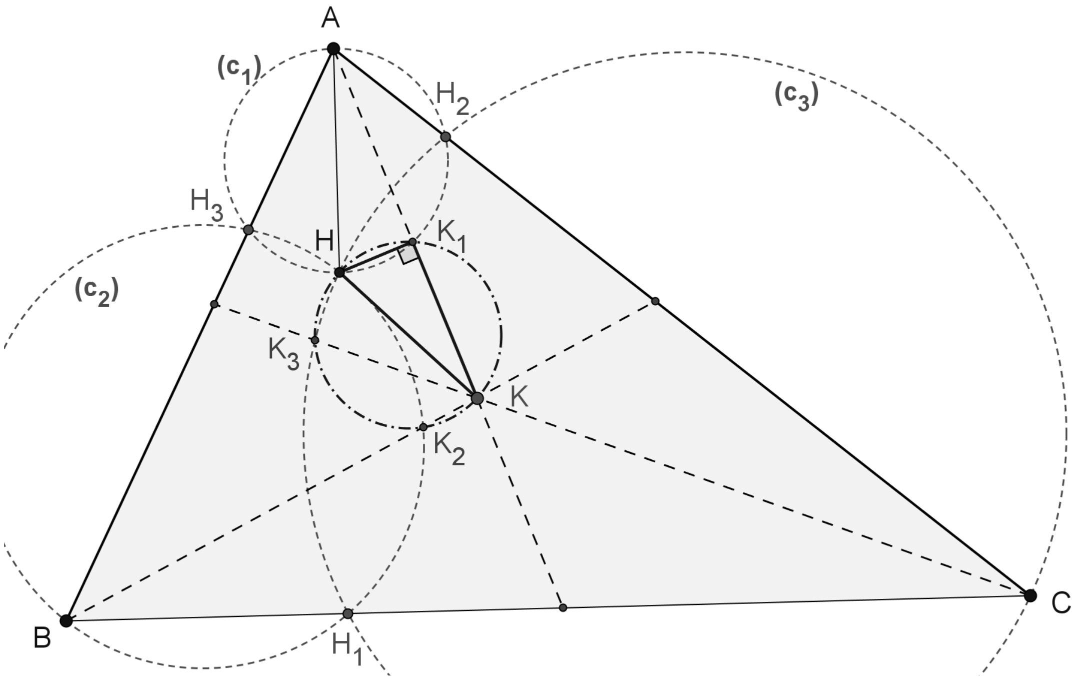
οπότε από την τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $(x, y, z) = (5, -5, 0)$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC, K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3. Να αποδείξτε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά (δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο), όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2.



Σχήμα 4

Το τετράπλευρο AH_2HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_1) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο BH_1HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο CH_1HH_2 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο H.
Τελικά, οι τρεις κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) περνάνε από το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABC.
Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AH, οπότε $HK_1 \perp AK_1$, δηλαδή το σημείο K_1 ανήκει στο κύκλο διαμέτρου HK.
Όμοια αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία K_2, K_3, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Λύση
Λόγω της ύπαρξης του $|x|$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $x \geq 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 - 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha+1)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha+1)^2 - 4 = (\alpha-1)(\alpha+3)$. Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες, όταν είναι $\alpha \leq -3$ ή $\alpha \geq 1$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο θετικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (1) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές θετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (1) έχει τη διπλή θετική ρίζα $x = 1$ στο $\mathbb{R}$.

- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (1) δεν έχει μη αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $x < 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 + 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha - 3)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha - 3)^2 - 4 = (\alpha - 5)(\alpha - 1)$. Άρα η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες όταν είναι $\alpha \le 1$ ή $\alpha \ge 5$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο αρνητικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha - 3 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 3$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (2) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (2) έχει τη διπλή αρνητική ρίζα $x = -1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (2) δεν έχει αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Από τις περιπτώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η δεδομένη εξίσωση έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, οι οποίες είναι ετερόσημες για $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 4
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Λύση
Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι ισχύει: $2x^2 + 3x + 2 > 0$ και $x^2 + x + 1 > 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν θέσουμε $a = \sqrt{2x^2 + 3x + 2},\ b = \sqrt{x^2 + x + 1},\ x \in \mathbb{R}$, τότε λαμβάνουμε:

$$a^2 - b^2 = (2x^2 + 3x + 2) - (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2,$$

οπότε από τη δεδομένη εξίσωση προκύπτει η εξίσωση με αγνώστους a, b,

$$a^2 - b^2 = (a - 2b)^2 \Leftrightarrow 4ab - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow b(4a - 5b) = 0 \Leftrightarrow 4a = 5b,$$

αφού είναι $b \ne 0$. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$4\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = 5\sqrt{x^2 + x + 1},$$

της οποίας τα δύο μέλη είναι θετικά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$16 \cdot (2x^2 + 3x + 2) = 25 \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 23x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-23 \pm 3\sqrt{37}}{14}.$$

Γ΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n + kn,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1 = 1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}^*$.

.

Λύση

Από τη δεδομένη αναδρομική σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = a_1 + k\\
&a_3 = a_2 + 2k\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-1} = a_{n-2} + (n-2)k\\
&a_n = a_{n-1} + (n-1)k
\end{aligned}$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$a_n = 1 + k(1+2+\dots+n-1) = 1 + k(1+2+\dots+n-1) = 1 + \frac{k(n-1)n}{2}.$$

Επομένως, αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές των k και n για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$\begin{aligned}
a_n = 1 + \frac{k(n-1)n}{2} = 2011 &\Leftrightarrow k(n-1)n = 4020\\
&\Leftrightarrow k(n-1)n = 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67 \qquad .\\
&\Leftrightarrow (n-1,n,k) = (1,2,2010) \text{ ή } (n-1,n,k) = (2,3,670).
\end{aligned}$$

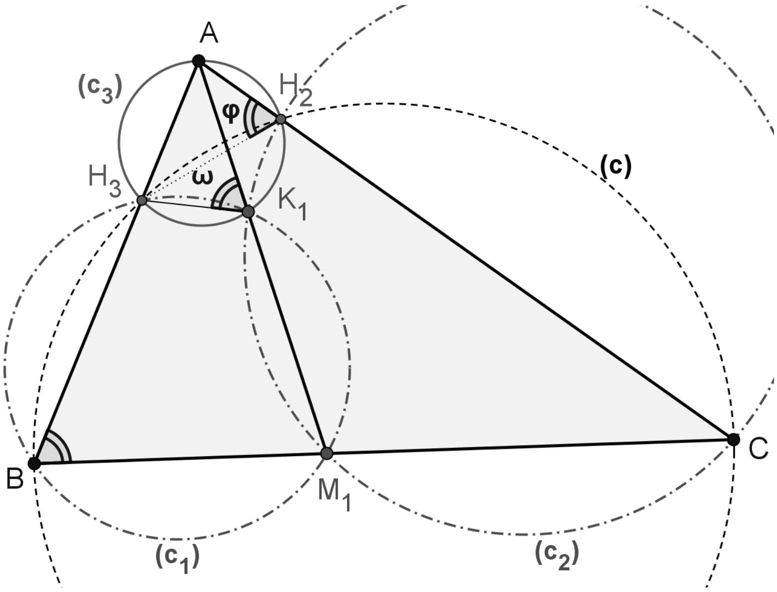
Επομένως, για $k = 2010$ είναι $a_2 = 2011$ και για $k = 670$ είναι $a_3 = 2011$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB, αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν , δηλαδή περνάνε από το ίδιο σημείο, αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BM_1H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CM_1H_2, (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 και (c) ο περιγεγραμμένος κύκλος του εγγράψιμου τετραπλεύρου BH_3H_2C.



Σχήμα 5

Θεωρώντας τις τέμνουσες AB και AC του κύκλου (c), συμπεραίνουμε:

$$AB \cdot AH_3 = AC \cdot AH_2.$$

Το γινόμενο όμως $AB \cdot AH_3$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_1) ενώ το γινόμενο $AC \cdot AH_2$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_2).

Άρα το σημείο A, ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων (c_1) και (c_2).

Έστω τώρα ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνονται στο σημείο K_1 (εκτός βέβαια από το σημείο M_1). Τότε η ευθεία που ορίζουν τα σημεία αυτά (δηλαδή τα K_1 και M_1) είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων (c_1) και (c_2).

Από τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτει ότι τα σημεία A, K_1 και M_1 είναι συνευθειακά.

Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο K_1, δηλαδή ότι το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο BH_3H_2C έχουμε: $\hat{\omega} = \hat{B}$. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BM_1K_1H_3$ έχουμε: $\hat{\varphi} = \hat{B}$. Άρα είναι $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι δύο άλλες τριάδες κύκλων, περνάνε από το ίδιο σημείο.

Προφανώς τώρα οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν, αν, και μόνο αν, συντρέχουν οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 (δεδομένου ότι τα σημεία A, K_1, M_1, τα σημεία B, K_2, M_2 και τα σημεία C, K_3, M_3, είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

Αν $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ με $(a,b) \neq (0,0)$ και $(x,y) \neq (0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2 - y^2\right) - 2bxy = x\left(a^2 - b^2\right) - 2aby$$

$$b\left(x^2 - y^2\right) + 2axy = y\left(a^2 - b^2\right) + 2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x = a$ και $y = b$.

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών, προκύπτει ότι το σύστημα των δύο δεδομένων εξισώσεων είναι ισοδύναμο με την εξίσωση:

$$\left[a\left(x^2-y^2\right)-2bxy\right]+\left[b\left(x^2-y^2\right)+2axy\right]i=\left[x\left(a^2-b^2\right)-2aby\right]+\left[y\left(a^2-b^2\right)+2abx\right]i$$

$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot\left[\left(x^2-y^2\right)+2xyi\right]=\left[\left(a^2-b^2\right)+2abi\right]\cdot(x+yi)$$

$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot(x+yi)^2=(a+bi)^2\cdot(x+yi)$$

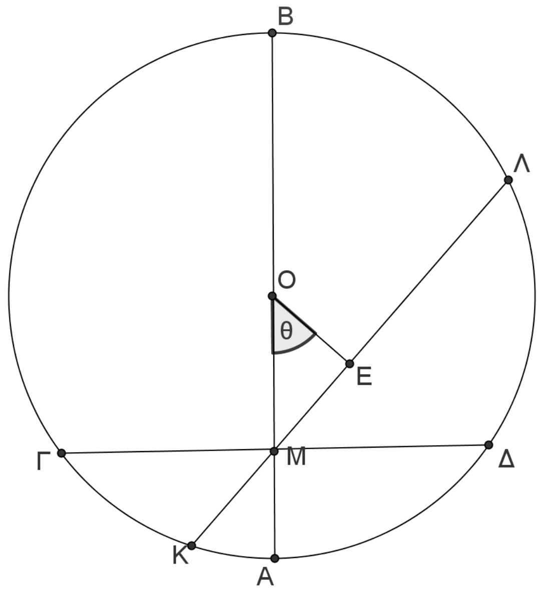
$$\Leftrightarrow x+yi=a+bi \text{ (αφού } (\alpha,\beta)\neq(0,0) \text{ και } (x,y)\neq(0,0))$$

$$\Leftrightarrow x=a,\ y=b.$$

Πρόβλημα 4

Σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r}=15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Λύση



Σχήμα 6

Θεωρούμε τη χορδή ΑΒ που περνάει από το σημείο Μ και το κέντρο Ο του κύκλου, καθώς και την κάθετη προς αυτήν χορδή ΓΜΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΓΔ. Η χορδή ΑΒ έχει ακέραιο μήκος $30cm$. Από το θεώρημα τεμνομένων χορδών έχουμε ότι:

$$\mathrm{ΓΜ}\cdot\mathrm{ΜΔ}=\mathrm{ΑΜ}\cdot\mathrm{ΜΒ}\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}\right)^2=6\cdot(9+15)\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}\right)^2=144\Leftrightarrow\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}=12\Leftrightarrow\mathrm{ΓΔ}=24.$$

Έτσι μέχρι τώρα έχουμε βρει δύο χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και έχουν ακέραιο μήκος. Θεωρούμε τυχούσα χορδή ΚΛ του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάει από το Μ και έστω $\mathrm{ΜΕ}=x$, $\mathrm{Μ\hat{Ο}Ε}=\theta$, όπου Ε είναι το μέσο της ΚΛ, σχήμα 6. Αν υποθέσουμε ότι $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, τότε έχουμε θεωρήσει όλες τις χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το Μ και τα άκρα τους Κ και Λ βρίσκονται στα ελάσσονα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{ΑΓ}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{ΒΔ}}$, αντίστοιχα . Για κάθε μία από αυτές τις χορδές αντιστοιχεί και μία ακόμη που είναι η συμμετρική της ως προς τη διάμετρο ΑΒ.

Για τη χορδή ΚΛ, αν συμβολίσουμε το μήκος της ως $\ell(\theta)$, έχουμε

$$\ell(\theta)=2\sqrt{225-81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

Επειδή είναι $\ell'(\theta)=\dfrac{81\eta\mu 2\theta}{\sqrt{225-81\sigma\upsilon\nu^2\theta}}>0,\ \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι η συνάρτηση $\ell(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε η συνάρτηση $\ell(\theta)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[\ell(0),\ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=[24,30]$. Άρα το μήκος της χορδής ΚΛ μπορεί να πάρει όλες τις ακέραιες τιμές του διαστήματος $[24,30]$. Αν λάβουμε υπόψιν και τη συμμετρική χορδή της ΚΛ ως προς τη διάμετρο ΑΒ, τότε τα πέντε μήκη 25, 26, 27, 28, 29 λαμβάνονται δύο φορές το καθένα, ενώ τα μήκη 24 και 30 λαμβάνονται από μία φορά. Έτσι έχουμε συνολικά 12 χορδές που περνάνε από το Μ με ακέραιο μήκος.

Παρατήρηση 1

Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το *θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής* για τη συνεχή συνάρτηση $\ell(\theta)=2\sqrt{225-81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$, η οποία έχει ελάχιστη τιμή την $\ell(0)=24$ και μέγιστη τιμή την $\ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=30$. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι τα μήκη των χορδών είναι αντιστρόφως ανάλογα από τα αποστήματά τους και ότι το μέγιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta=0$, ενώ το ελάχιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

Παρατήρηση 2

Σημειώνουμε ακόμη ότι οι χορδές με ακέραια μήκη 25, 26, 27, 28, 29, μπορούν να κατασκευαστούν γεωμετρικά, αφού αν θέσουμε $\text{ΚΜ}=x$ και $\text{ΜΛ}=y$, τότε έχουμε

$$x+y=m,\ m\in\{25,26,27,28,29\}\ \text{και}\ xy=144=12^2.$$

Έτσι εξασφαλίζουμε την ύπαρξη αυτών των χορδών με ακέραιο μήκος, χωρίς τη χρήση του διαφορικού λογισμού.