



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
 71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
 ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{8^2} \cdot \left(2^3 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \quad \text{και} \quad B = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{3^3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{3^2}{2^7}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} = \frac{1}{6},$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma = \frac{8 - \alpha}{4\alpha} + \frac{12 - 2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma - 3}{12}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$A = \frac{1}{8^2} \cdot \left(2^3 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{64} \cdot \left(8 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{64} \cdot \left(9 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{64} \cdot 9 = \frac{9}{64},$$

$$B = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{3^3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{3^2}{2^7} = \left(\frac{9}{27} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{27} - \frac{6}{27} \right) \cdot \frac{9}{128} = \frac{8}{27} : \frac{4}{27} \cdot \frac{9}{128} = \frac{8}{27} \cdot \frac{27}{4} \cdot \frac{9}{128} = \frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $A = B$.

Σημείωση. Λόγω της μη ύπαρξης παρενθέσεων που να δίνουν προτεραιότητα στις πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού θεωρούμε δεκτή και τη λύση της μορφής

$$B = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{3^3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{3^2}{2^7} = \left(\frac{9}{27} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{27} - \frac{6}{27} \right) \cdot \frac{9}{128} = \frac{8}{27} : \frac{4}{27} \cdot \frac{9}{128} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{4} = \frac{768}{27}.$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $A < 1 < B$, δηλαδή $A < B$.

(β) Λόγω της υπόθεσης $\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} = \frac{1}{6}$, έχουμε ότι:

$$\Gamma = \frac{8 - \alpha}{4\alpha} + \frac{12 - 2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma - 3}{12} = \frac{8}{4\alpha} - \frac{\alpha}{4\alpha} + \frac{12}{3\beta} - \frac{2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma}{12} - \frac{3}{12}$$

$$= \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{4} + \frac{4}{\beta} - \frac{2}{3} + \frac{\gamma}{6} - \frac{1}{4} = \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6} - \frac{7}{6} = -1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου A και 60 αυτοκίνητα τύπου B. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου A είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου B είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου A και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου A και B.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου A κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου B κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Λύση

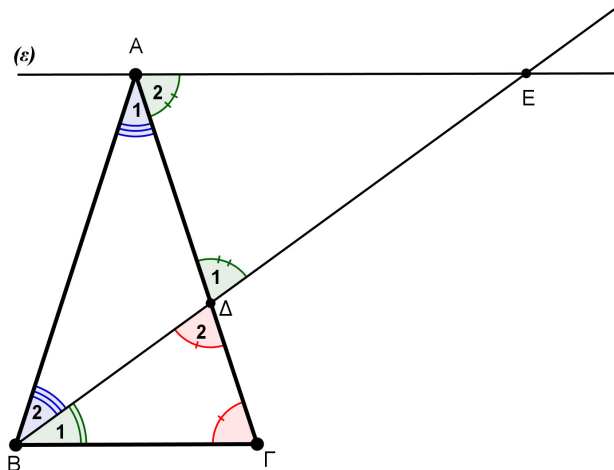
Το 30% των αυτοκινήτων τύπου A είναι $20 \cdot \frac{30}{100} = 6$ αυτοκίνητα, ενώ το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου A και B είναι $(20 + 60) \cdot \frac{60}{100} = 80 \cdot \frac{60}{100} = 48$ αυτοκίνητα. Επομένως από τα αυτοκίνητα τύπου B πουλήθηκαν $48 - 6 = 42$ αυτοκίνητα.

Από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου A κερδίζει $10000 \cdot \frac{5}{100} = 500$ ευρώ, ενώ από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου B κερδίζει $12000 \cdot \frac{10}{100} = 1200$ ευρώ. Επομένως από την πώληση των αυτοκινήτων ο έμπορος κέρδισε $6 \cdot 500 + 42 \cdot 1200 = 3000 + 50400 = 53400$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ABE είναι ισοσκελή.

Λύση



Σχήμα 1

Το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ είναι 180° . Επειδή όμως ισχύει $\hat{A} = 36^\circ$, θα έχουμε: $\hat{B} = \hat{G} = 72^\circ$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{B} , οπότε $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

Επειδή τώρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 36^\circ$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B}_1 = 36^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 72^\circ$. Άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^\circ$.

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^\circ$, προκύπτει ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες \hat{A}_2 και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την AG .

Από την ισότητα τέλος των γωνιών $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 72^\circ$ (ως κατά κορυφή), προκύπτει η ισότητα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 = 72^\circ$. Επομένως το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες \hat{B}_1 και \hat{E} είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την BE . Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = 36^\circ$, οπότε θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Επομένως και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

- (i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta} = 100\alpha + 10\gamma + \beta$.
- (ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x + 12 < 5x - 1$.
- (iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 3.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow 9 \cdot (\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3. \quad (1)$$

Για την ανίσωση του ερωτήματος (ii) έχουμε:

$$3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 3x - 5x < -12 - 1 \Leftrightarrow -2x < -13 \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος που είναι λύση της είναι ο 7, οπότε έχουμε:

$$\beta + \gamma = 7. \quad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\beta = 10, 2\gamma = 4 \Leftrightarrow \beta = 5, \gamma = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε ως εξής: Επειδή οι ακέραιοι β, γ είναι ψηφία με διαφορά $\beta - \gamma = 3$ θα είναι $\beta > \gamma$ και επειδή επιπλέον έχουν άθροισμα 7, οι δυνατές τιμές τους είναι

$$\beta = 7, \gamma = 0 \text{ ή } \beta = 6, \gamma = 1 \text{ ή } \beta = 5, \gamma = 2 \text{ ή } \beta = 4, \gamma = 3.$$

Επειδή πρέπει $\beta - \gamma = 3$ οι αποδεκτές τιμές είναι $\beta = 5, \gamma = 2$.

Άρα ο θετικός ακέραιος A θα έχει τη μορφή $A = \overline{\alpha 52}$ με άθροισμα ψηφίων $\alpha + 7$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο A διαιρείται με το 3, πρέπει και αρκεί ο ακέραιος $\alpha + 7$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε, αφού το α είναι ψηφίο, οι κατάλληλες τιμές του είναι: $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Επομένως, έχουμε $A = 252$ ή $A = 552$ ή $A = 852$

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4} - \frac{7-3x}{8} = 1.$$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{3\beta} \right)^{-3} - 9\beta^2 - 20,$$

$$\text{για } \beta = -\frac{1}{3}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2x+18}{4} - \frac{7-3x}{8} = 1 &\Leftrightarrow 2 \cdot (2x+18) - (7-3x) = 8 \Leftrightarrow 4x+36-7+3x=8 \\ &\Leftrightarrow 7x+29=8 \Leftrightarrow 7x=8-29 \Leftrightarrow 7x=-21 \Leftrightarrow x=-3. \end{aligned}$$

(β) Για $\beta = -\frac{1}{3}$ η παράσταση A γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} \right)^{-3} - 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 20 = \left(\frac{1}{\frac{1}{9}} + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{-1} \right)^{-3} - 9 \cdot \frac{1}{9} - 20 \\ &= \left(9 + \frac{1}{9} \right) \cdot (-1)^3 - 1 - 20 = \left(\frac{81}{9} + \frac{1}{9} \right) \cdot (-1) - 1 - 20 = -\frac{82}{9} - 1 - 20 \\ &= -\frac{82}{9} - \frac{9}{9} - \frac{180}{9} = -\frac{271}{9}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α, β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha \leq 10, \beta \geq 12 \text{ και } (\alpha - 12) \cdot (40 - 2\beta) \leq 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $A = 3\alpha - 2\beta$.

Λύση

Είναι $\alpha \leq 10$, οπότε $\alpha - 12 < 0$. Άρα, για να αληθεύει η ανίσωση $(\alpha - 12) \cdot (40 - 2\beta) \leq 0$,

αρκεί να ισχύει ότι: $40 - 2\beta \geq 0 \Leftrightarrow 40 \geq 2\beta \Leftrightarrow \beta \leq 20$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha \leq 10 \text{ και } 12 \leq \beta \leq 20 &\Rightarrow 0 \leq 3\alpha \leq 30 \text{ και } 24 \leq 2\beta \leq 40 \\ &\Rightarrow 0 \leq 3\alpha \leq 30 \text{ και } -40 \leq -2\beta \leq -24, \end{aligned}$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-40 \leq A = 3\alpha - 2\beta \leq 6,$$

οπότε η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης A είναι 6, ενώ η μικρότερη τιμή της είναι -40.

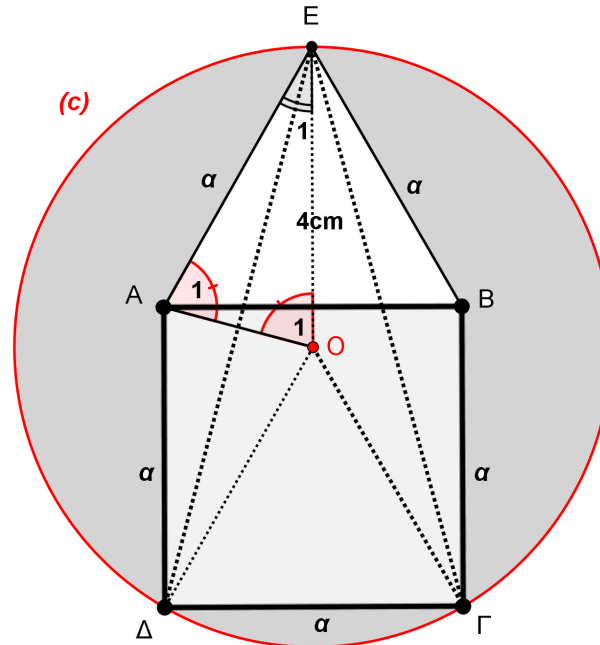
Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ABE εξωτερικά του τετραγώνου ABΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και E έχει ακτίνα 4 cm.

- (i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.
 (ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.
 (iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΔΓΒΕ και εσωτερικά του κύκλου (c).

Λύση

- (i) Στα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ ισχύουν: $ΑΕ = ΒΕ = \alpha$, $ΑΔ = ΒΓ = \alpha$ και $\hat{Ε}ΑΔ = \hat{Ε}ΒΓ = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.



Σχήμα 2

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα και κατά συνέπεια $ΕΔ = ΕΓ$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

(ii) Εφόσον $ΕΔ = ΕΓ$, το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΔΓ (που ταυτίζεται με τη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ). Επίσης $ΕΑ = ΕΒ$, οπότε το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Άρα η ΟΕ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ και κατά συνέπεια διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}ΕΒ$ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ. Άρα είναι $\hat{Ε}_1 = 30^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} ΑΕ = ΑΔ = \alpha \\ ΟΕ = ΟΔ = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow ΟΑ \text{ μεσοκάθετη της } ΕΔ \Rightarrow ΟΑ \text{ διχοτόμος της } \hat{Δ}ΑΕ \Rightarrow \hat{Α}_1 = 75^\circ.$$

Στο τρίγωνο ΑΟΕ έχουμε: $\hat{Α}_1 = 75^\circ$ και $\hat{Ε}_1 = 30^\circ$. Άρα $\hat{Ο}_1 = 75^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΑΟΕ είναι ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΟ = \alpha = 4 \text{ cm}$.

(iii) Το εμβαδόν του κύκλου (c) είναι: $E_c = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι: $E_{\text{τετ}} = 4^2 = 16$, ενώ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ είναι: $E_{\text{τρ}} = 4\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι: $E = 16\pi - 16 - 4\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

- (i) $A - B = 198$, όπου $B = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$,

(ii) Η εξίσωση $\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma} - \frac{\alpha-2\gamma}{x} = 1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 9.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 198 \Leftrightarrow 99 \cdot (\alpha - \gamma) = 198 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 2. \quad (1)$$

Η εξίσωση της πρότασης (ii), αν $\gamma \neq 2\alpha$ και $x \neq 0$, γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma} - \frac{\alpha-2\gamma}{x} - 1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma} - \frac{x+\alpha-2\gamma}{x} = 0 \Leftrightarrow (x+\alpha-2\gamma) \left(\frac{1}{2\alpha-\gamma} - \frac{1}{x} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+\alpha-2\gamma = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2\alpha-\gamma} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2\gamma - \alpha \quad \text{ή} \quad x = 2\alpha - \gamma \end{aligned}$$

Επειδή, λόγω της (ii) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι 4, έχουμε ότι

$$(2\gamma - \alpha) + (2\alpha - \gamma) = 4 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 4, \quad (2)$$

με τους περιορισμούς για τις παραμέτρους $\gamma \neq 2\alpha$ και $\alpha \neq 2\gamma$.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2\alpha = 6, \quad 2\gamma = 2 \Leftrightarrow \alpha = 3, \quad \gamma = 1$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί για την εξίσωση.

Άρα ο θετικός ακέραιος A θα έχει τη μορφή $A = \overline{3\beta 1}$ με άθροισμα ψηφίων $4 + \beta$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο A διαιρείται με το 9, πρέπει και αρκεί $4 + \beta = \text{πολ.}(9)$, οπότε, αφού το β είναι ψηφίο, η μοναδική δυνατή τιμή του είναι $\beta = 5$.

Επομένως, ο ζητούμενος θετικός ακέραιος A είναι ο 351.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για $\beta = 0$, ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10} = \alpha$ είναι ρητός, για κάθε ρητό αριθμό α .

Έστω ότι, για $\beta \neq 0$, ο αριθμός $\rho = \alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$\rho - \alpha = (\alpha + \beta\sqrt{10}) - \alpha = \beta\sqrt{10}$$

θα είναι ρητός, αλλά και ο αριθμός $\frac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{10}$ θα είναι ρητός, που είναι άτοπο.

Άρα ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός, για $\beta = 0$ και για κάθε ρητό αριθμό α .

(ii) Έστω ότι ο αριθμός $x = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$x^2 = \left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 5 + \frac{2}{4} + \sqrt{10} = \frac{11}{2} + \sqrt{10},$$

θα είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$(|x| - 2)^2 = x^2 + 4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2 - 4|x| + 4 = x^2 + 4\alpha \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 4 = x^2 + 4\alpha \Leftrightarrow |x| = 1 - \alpha.$$

Επειδή είναι $|x| \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x , διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha < 1$, οπότε είναι $1 - \alpha > 0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:

$$x = 1 - \alpha \quad \text{ή} \quad x = \alpha - 1.$$

- $\alpha = 1$, οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

- $\alpha > 1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή του A και είναι παράλληλη προς τη πλευρά $B\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{B} τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ και έστω E το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή A . Από το A τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την EB η οποία τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο M και τη $B\Gamma$ στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι: $AB = BK = K\Delta = \Delta A$.

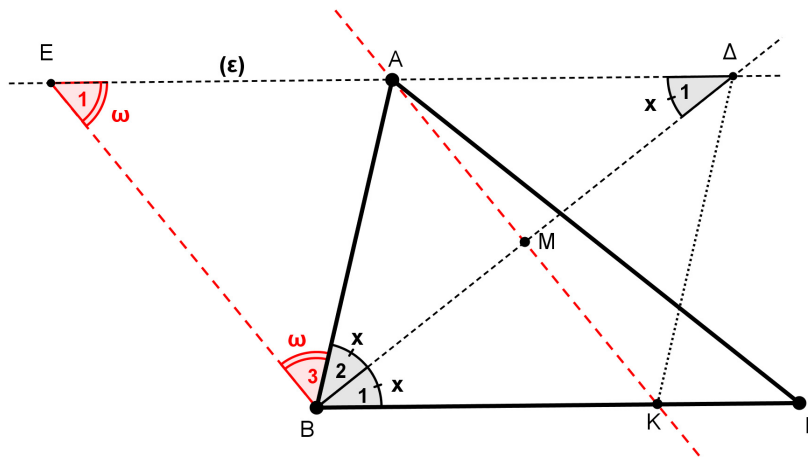
Λύση

Επειδή είναι $\triangle APB \cong \triangle A \Gamma$ θα ισχύει: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επίσης η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{B} , οπότε θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$AB = A\Delta. \quad (1)$$



Σχήμα 3

Επειδή E είναι το συμμετρικό του Δ ως προς το A , θα ισχύει:

$$A\Delta = AE. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $AE = AB$ και κατά συνέπεια $\hat{E}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\omega}$.

Από το τρίγωνο τώρα $BE\Delta$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{E}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^\circ \Rightarrow \hat{x} + \hat{\omega} = 90^\circ,$$

δηλαδή το τρίγωνο $BE\Delta$ είναι ορθογώνιο ($BE \perp B\Delta$) και εφόσον $AM \perp BE$ καταλήγουμε:

$$AM \perp B\Delta.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $BA\Delta$ η AM είναι ύψος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς $B\Delta$.

Επειδή τώρα το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετη του $B\Delta$, το τρίγωνο KBA είναι ισοσκε-

λές και ίσο με το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$ (διότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και $B\Delta$ κοινή πλευρά). Άρα θα

έχουν και $AB = A\Delta = BK = K\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2.$$

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες λαμβάνουμε

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 2010^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2010^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - \frac{2}{3} \cdot 2010^2 = \frac{2010^2}{3}.$$

Άρα έχουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \frac{2010^2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2010^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma,$$

γιατί, αν ήταν $\alpha - \beta \neq 0$ ή $\beta - \gamma \neq 0$ ή $\gamma - \alpha \neq 0$, τότε θα είχαμε

$$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 > 0.$$

Επομένως, από την ισότητα $\alpha + \beta + \gamma = 2010$ λαμβάνουμε $\alpha = \beta = \gamma = 670$.

Β' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(|x|-1)^2 = 2x + \alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 - 2|x| + 1 = 2x + \alpha \Leftrightarrow x^2 - 2(|x| + x) + 1 - \alpha = 0. \quad (1)$$

Λόγω της παρουσίας της απόλυτης τιμής του x , διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x \geq 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 - 4x + 1 - \alpha = 0, \quad (2)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 16 - 4(1 - \alpha) = 4(3 + \alpha)$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες στο \mathbb{R} , αν, και μόνον αν, $\alpha \geq -3$. Για να διαπιστώσουμε πόσες από αυτές είναι δεκτές θεωρούμε το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών που είναι

$$P = 1 - \alpha \text{ και } S = 4 > 0.$$

Έτσι, για την εξίσωση (2) έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\alpha = -3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x = 2$.
- Αν $-3 < \alpha \leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** μη αρνητικές, $x = 2 \pm \sqrt{3 + \alpha}$. Ειδικότερα, αν $\alpha = 1$, τότε η εξίσωση έχει τις ρίζες $x = 4$ και $x = 0$.
- Αν $\alpha > 1$, τότε η εξίσωση έχει **μία** μόνο ρίζα μη αρνητική, τη $x = 2 + \sqrt{3 + \alpha}$

(ii) $x < 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + 1 - \alpha = 0, \quad (3)$$

η οποία έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, τη $x = -\sqrt{\alpha - 1}$, αν $\alpha > 1$.

Συνοπτικά, από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε για τη δεδομένη εξίσωση, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $\alpha < -3$, η εξίσωση **δεν έχει ρίζες** στο \mathbb{R} .
- Αν $\alpha = -3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x = 2$.
- Αν $-3 < \alpha \leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, $x = 2 \pm \sqrt{3 + \alpha}$.
- Αν $\alpha > 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, τις $x = 2 + \sqrt{3 + \alpha}$, $x = -\sqrt{\alpha - 1}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x + y + z = 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 26$$

$$xy + xz = (yz + 1)^2.$$

Λύση

Έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ xy + xz = (yz + 1)^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 26 \\ xy + xz = (yz + 1)^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ xy + yz + zx = 19 \\ xy + xz = (yz + 1)^2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=19 \\ 19-yz=(yz+1)^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ (yz)^2+3(yz)-18=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \text{ ή } yz=3 \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=3 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=16 \\ yz=3 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=25 \\ yz=-6 \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=16 \\ yz=3 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=25 \\ yz=-6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+16=0 \\ yz=3 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0 \\ yz=-6 \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x=4 \\ yz=3 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0 \text{ (αδύνατη στο } \cdot \text{)} \\ yz=-6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ y+z=4 \\ yz=3 \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ z=4-y \\ y(4-y)=3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ z=4-y \\ y^2-4y+3=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x,y,z)=(4,1,3) \text{ ή } (x,y,z)=(4,3,1).
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

Αν οι α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq \frac{(\alpha^3 + \beta^3)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\beta^3 + \gamma^3)\alpha}{\beta^2 + \gamma^2} + \frac{(\gamma^3 + \alpha^3)\beta}{\gamma^2 + \alpha^2} < 2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{(\alpha^3 + \beta^3)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} < \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} = (\alpha + \beta)\gamma, \quad (1)$$

$$\frac{(\alpha^3 + \beta^3)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} \geq \frac{(\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\gamma. \quad (2)$$

Η ισότητα στη (2) ισχύει, αν, και μόνον αν, $\alpha = \beta$.

Άρα έχουμε

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\gamma \leq \frac{(\alpha^3 + \beta^3)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} < (\alpha + \beta)\gamma. \quad (3)$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\alpha \leq \frac{(\beta^3 + \gamma^3)\alpha}{\beta^2 + \gamma^2} < (\beta + \gamma)\alpha, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)\beta \leq \frac{(\gamma^3 + \alpha^3)\beta}{\gamma^2 + \alpha^2} < (\gamma + \alpha)\beta. \quad (5)$$

Οι ισότητες στις (4) και (5) ισχύει αν, και μόνον αν, $\beta = \gamma$ και $\gamma = \alpha$, αντίστοιχα.

Από τις (3), (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε \therefore

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq \frac{(\alpha^3 + \beta^3)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\beta^3 + \gamma^3)\alpha}{\beta^2 + \gamma^2} + \frac{(\gamma^3 + \alpha^3)\beta}{\gamma^2 + \alpha^2} < 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \quad (6)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \quad (7)$$

οπότε από τις (6) και (7) προκύπτουν οι ζητούμενες ανισότητες.

Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν, $\alpha = \beta = \gamma$, οπότε από τη σχέση $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$, προκύπτει ότι $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Παρατήρηση. Η δεύτερη ανισότητα είναι γνήσια από την κατασκευή της άσκησης με τους α, β, γ θετικούς πραγματικούς αριθμούς, λόγω της ισότητας $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$. Στην περίπτωση που επιτρέψουμε οι α, β, γ να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, δίνοντας στην παραπάνω ισότητα τη μορφή $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$, τότε η δεύτερη ανισότητα γίνεται

$$\frac{(\alpha^3 + \beta^3)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\beta^3 + \gamma^3)\alpha}{\beta^2 + \gamma^2} + \frac{(\gamma^3 + \alpha^3)\beta}{\gamma^2 + \alpha^2} \leq 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, ένας μόνον από τους α, β, γ είναι μηδέν και οι άλλοι δύο αντίστροφοι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R . Από το σημείο A φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r = OM$ (M είναι το μέσο της $B\Gamma$). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο T , τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο N και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $BN < BM$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ , τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο K και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\Gamma K < \Gamma M$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Οι χορδές AN_1, AK_1 και $B\Gamma$ του κύκλου (c), είναι εφαπτόμενες του κύκλου (c_1) στα σημεία T, Σ και M αντίστοιχα. Άρα οι ακτίνες $OT, O\Sigma$ και OM του κύκλου (c_1), είναι κάθετες προς τις χορδές AN_1, AK_1 και $B\Gamma$ του κύκλου (c) αντίστοιχα. Δηλαδή οι ακτίνες $OT, O\Sigma$ και OM του κύκλου (c_1), είναι τα αποστήματα που αντιστοιχούν στις χορδές AN_1, AK_1 και $B\Gamma$ του κύκλου (c). Τα αποστήματα $OT, O\Sigma$ και OM είναι ίσα μεταξύ τους, αφού είναι ακτίνες του κύκλου (c_1).

Άρα $AN_1 = AK_1 = B\Gamma$ (*) και τα σημεία T, Σ, M είναι τα μέσα των χορδών AN_1, AK_1 και $B\Gamma$, αντίστοιχα. Από τους προηγούμενους συλλογισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$MB = M\Gamma = TA = TN_1 = \Sigma A = \Sigma K_1 \quad (1)$$

Το σημείο N βρίσκεται εκτός του κύκλου (c_1) και NM, NT είναι τα εφαπτόμενα τμήματα, οπότε

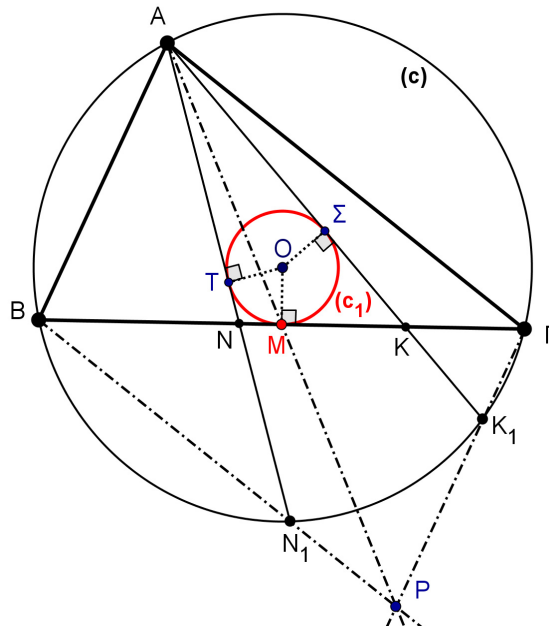
$$NM = NT \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} (1): MB = TN_1 \\ (2): NM = NT \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MB}{MN} = \frac{TN_1}{NT} \Rightarrow \text{TM PBN}_1 \quad (3)$$

Συνδυάζοντας και πάλι τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} (1): M\Gamma = TA \\ (2): NM = NT \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{M\Gamma}{NM} = \frac{TA}{NT} \Rightarrow \text{TM} // \text{A}\Gamma \quad (4)$$



Σχήμα 4

Από τις (3) και (4) έχουμε $BN_1 \parallel \text{PA}\Gamma$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\Gamma K_1 \parallel \text{PAB}$. Αν λοιπόν P είναι η τομή των ευθειών BN_1 και ΓK_1 , τότε το τετράπλευρο $ABP\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM θα συντρέχουν στο P .

(*) “Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.”
(Θεώρημα ΙΙΙ, Σελ.46, του Σχολικού βιβλίου της ΕΜΕ)

Γ' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha^2 + 4\beta^2)\gamma}{4\alpha\beta} + \frac{(\beta^2 + 4\gamma^2)\alpha}{4\beta\gamma} + \frac{(\gamma^2 + 4\alpha^2)\beta}{4\gamma\alpha} > 12$$

Λύση

Από τις γνωστές ανισότητες

$$\alpha^2 + 4\beta^2 \geq 4\alpha\beta, \beta^2 + 4\gamma^2 \geq 4\beta\gamma, \gamma^2 + 4\alpha^2 \geq 4\gamma\alpha, \quad (1)$$

λαμβάνουμε τις ανισότητες:

$$\frac{\alpha^2 + 4\beta^2}{4\alpha\beta} \geq \frac{4\alpha\beta}{4\alpha\beta} = 1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \alpha = 2\beta) \Rightarrow \frac{(\alpha^2 + 4\beta^2)\gamma}{4\alpha\beta} \geq \gamma \quad (2)$$

$$\frac{\beta^2 + 4\gamma^2}{4\beta\gamma} \geq \frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma} = 1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \beta = 2\gamma) \Rightarrow \frac{(\beta^2 + 4\gamma^2)\alpha}{4\beta\gamma} \geq \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\gamma^2 + 4\alpha^2}{4\gamma\alpha} \geq \frac{4\gamma\alpha}{4\gamma\alpha} = 1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \gamma = 2\alpha) \Rightarrow \frac{(\gamma^2 + 4\alpha^2)\beta}{4\gamma\alpha} \geq \beta \quad (4)$$

Από τις (2), (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{(\alpha^2 + 4\beta^2)\gamma}{4\alpha\beta} + \frac{(\beta^2 + 4\gamma^2)\alpha}{4\beta\gamma} + \frac{(\gamma^2 + 4\alpha^2)\beta}{4\gamma\alpha} \geq \alpha + \beta + \gamma = 12. \quad (5)$$

Η ισότητα στη σχέση (5) ισχύει, αν, και μόνον αν, ισχύουν οι ισότητες και στις τρεις σχέσεις (2), (3) και (4) ή ισοδύναμα:

$$\alpha = 2\beta, \beta = 2\gamma, \gamma = 2\alpha,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\alpha = \beta = \gamma = 0$, που είναι άτοπο, αφού οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Επομένως έχουμε αποδείξει ότι:

$$\frac{(\alpha^2 + 4\beta^2)\gamma}{4\alpha\beta} + \frac{(\beta^2 + 4\gamma^2)\alpha}{4\beta\gamma} + \frac{(\gamma^2 + 4\alpha^2)\beta}{4\gamma\alpha} > 12.$$

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 5 \\ y^2 - 3xy = -2 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει λύση (x, y) του συστήματος (Σ) , με $x = 0$ ή $y = 0$, τότε λαμβάνουμε $0 = 5$ ή $0 = -2$, άτοπο.

Για $xy \neq 0$, η μία εξίσωση του συστήματος μπορεί να αντικατασταθεί με αυτήν που προκύπτει από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{x^2 + 2xy}{y^2 - 3xy} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1 + 2 \cdot \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3 \cdot \frac{y}{x}} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + 2m}{m^2 - 3m} = -\frac{5}{2} \\ \frac{y}{x} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 11m + 2 = 0 \\ \frac{y}{x} = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ ή } m = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} m = \frac{1}{5} \\ y = \frac{x}{5} \end{cases}.$$

Επομένως έχουμε:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy = 5 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^2 + 2xy = 5 \\ y = \frac{x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \frac{7x^2}{5} = 5 \\ y = \frac{x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = \pm \frac{5\sqrt{7}}{7} \\ y = \frac{x}{5} \end{cases}$$

$$(x, y) = (1, 2) \text{ ή } (x, y) = (-1, -2) \text{ ή } (x, y) = \left(\frac{5\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}\right) \text{ ή } (x, y) = \left(-\frac{5\sqrt{7}}{7}, -\frac{\sqrt{7}}{7}\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AOB (έστω (c_1)), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και την $B\Gamma$ στο σημείο N . Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓKN και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $O\Gamma K$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1) , (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

Έστω R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των κύκλων $(c_1), (c_2)$ και (c_3) αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $R_1 = R_2 = R_3$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AKOB$ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AONB$ έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $OB\Gamma$, έχουμε: $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο OAG , έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις παραπάνω ισότητες των γωνιών, προκύπτει $\hat{N}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{K}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή τα τρίγωνα $NA\Gamma$ και $KB\Gamma$ είναι ισοσκελή, οπότε $NA = N\Gamma$ και $KB = K\Gamma$.

Τα τρίγωνα τώρα OKB και $OK\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $OB = O\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου (c))

2. OK (κοινή)

3. $KB = K\Gamma$ (από το ισοσκελές τρίγωνο $KB\Gamma$).

Εφόσον λοιπόν τα τρίγωνα OKB και $OK\Gamma$ είναι ίσα, θα έχουν ίσους τους περιγεγραμμένους κύκλους τους (c_1) και (c_3) .

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) ($1^{ος}$ τρόπος)

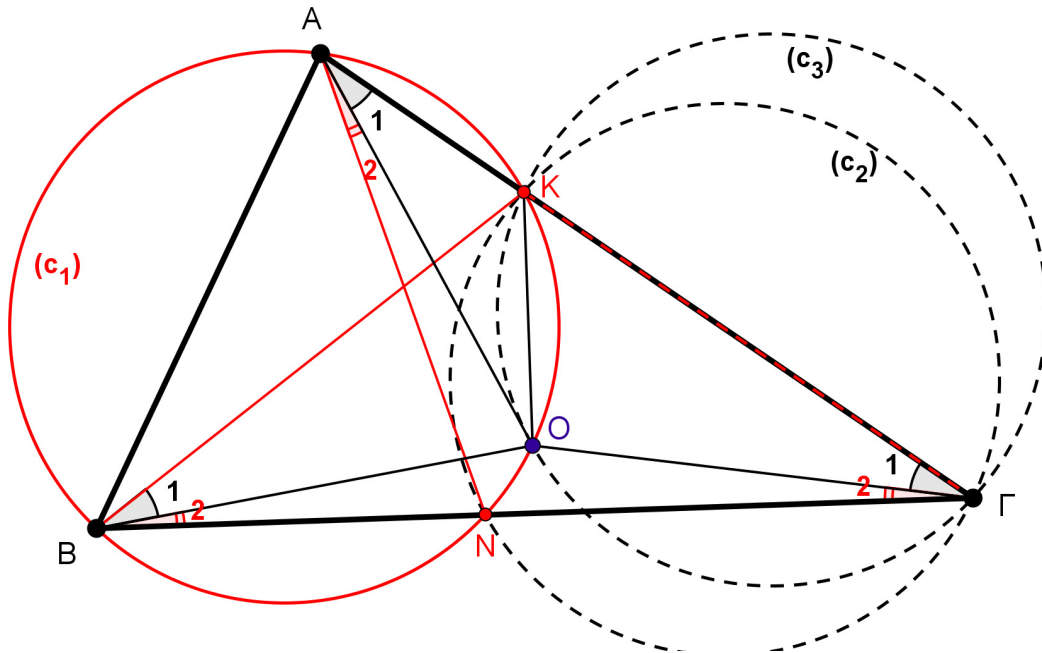
Θεωρούμε τώρα τα τρίγωνα KNB και $KN\Gamma$ που έχουν περιγεγραμμένους κύκλους (c_1) και (c_2) αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τον τύπο $E = (AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ που εκφράζει το εμβαδό τριγώνου συναρτήσει του μήκους των πλευρών και της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Έστω λοιπόν $E_1 = (KNB)$ το εμβαδό του τριγώνου KNB και $E_2 = (KN\Gamma)$ το εμβαδό του τριγώνου $KN\Gamma$. Τότε:

$$\left. \begin{aligned} E_1 = (KNB) &= \frac{NB \cdot NK \cdot BK}{4R_1} \\ E_2 = (KN\Gamma) &= \frac{N\Gamma \cdot NK \cdot \Gamma K}{4R_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{4R_2 \cdot NB \cdot NK \cdot BK}{4R_1 \cdot N\Gamma \cdot NK \cdot \Gamma K} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2 \cdot NB}{R_1 \cdot N\Gamma}, \quad (1)$$

(για τη τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $KB = \Gamma K$, που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $KB\Gamma$).



Σχήμα 5

Τα τρίγωνα KNB και $KN\Gamma$ έχουν τις γωνίες τους \widehat{KNB} και $\widehat{KN\Gamma}$ παραπληρωματικές.
Άρα:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{NB \cdot NK}{N\Gamma \cdot NK} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{NB}{N\Gamma}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $R_1 = R_2$.

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) (2^{ος} τρόπος)

Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα KNB και $KN\Gamma$ έχουμε:

$$\frac{KN}{\eta\mu(\widehat{KBN})} = 2R_1 \quad \text{και} \quad \frac{KN}{\eta\mu(\widehat{\Gamma})} = 2R_2.$$

Από την ισότητα τώρα των γωνιών $\widehat{KBN} = \widehat{\Gamma}$, καταλήγουμε: $R_1 = R_2$.

Πρόβλημα 4

Η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n - \frac{k}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a_1 = 1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k .

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι k, n τέτοιοι ώστε : $a_n = \frac{1}{2^{1000}}$.

Λύση

(i) Από τις υποθέσεις έχουμε

$$a_2 = a_1 - \frac{k}{2}, \quad a_3 = a_2 - \frac{k}{2^2}, \quad \dots, \quad a_n = a_{n-1} - \frac{k}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$a_n = a_1 - k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 1 - k \left(-1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) \Leftrightarrow$$

$$a_n = 1 + k - 2k \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(ii) Έστω ότι:

$$a_n = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k) \cdot 2^{n-1+1000} + k \cdot 2^{1000} = 2^{n-1},$$

όπου k θετικός ακέραιος και $n \in \mathbb{N}^*, n > 1$. Τότε έχουμε

$$2^{n-1+1000} - 2^{n-1} = k(2^{n-1+1000} - 2^{1000}).$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} > 0, \quad k \in \mathbb{A}. \quad (1)$$

- Αν υποθέσουμε ότι $n-1 > 1000 \Leftrightarrow n > 1001$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει, ότι $k \in (0, 1)$, άτοπο.
- Αν υποθέσουμε ότι $n-1 < 1000 \Leftrightarrow n < 1001$, τότε έχουμε:

$$k - 1 = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} - 1 = \frac{2^{1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} = \frac{1 - 2^{n-1001}}{2^{n-1} - 1},$$

οπότε θα είναι $0 < k - 1 < 1$, που είναι άτοπο.

Άρα είναι $n-1 = 1000 \Leftrightarrow n = 1001$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $k = 1$.