ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
28 Ιανουαρίου 2017

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να βρεθούν όλα τα μη μηδενικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, με α,β μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha+\beta=4$.

(β) Για το μικρότερο από τα κλάσματα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right)$.

Λύση

(α) Αφού το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μη μηδενικό πρέπει $\alpha\neq 0$ και αφού το β είναι παρονομαστής πρέπει $\beta\neq 0$. Αφού α,β είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $\alpha+\beta=4$ πρέπει να ισχύει $\alpha<4$ και $\beta<4$. Επομένως, έχουμε:

$$\alpha=3,\ \beta=1,\ \frac{\alpha}{\beta}=3\ ,\ \ \alpha=2,\ \beta=2,\ \frac{\alpha}{\beta}=1 \text{ και } \alpha=1,\ \beta=3,\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}.$$

(β) Το μικρότερο από τα κλάσματα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι το $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right)=\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot 1}{3}-\frac{9}{27}\right)\\&=\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=2-1=1.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο θετικός ακέραιος Α έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α.

Λύση

Επειδή είναι $12=2\cdot 2\cdot 3$ τα δυνατά ψηφία του Α, έτσι ώστε αυτά να έχουν άθροισμα 9 είναι τα εξής:

(α) 2,6,1 (τριψήφιος αριθμός)
(β) 3,4,1,1 (τετραψήφιος αριθμός)

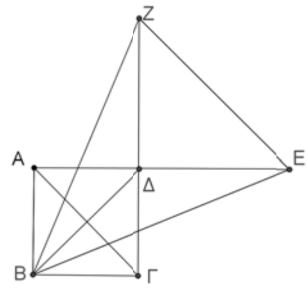
(γ) 2,2,3,1,1 (πενταψήφιος αριθμός)

Η μικρότερη δυνατή τιμή μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (α). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4. οι δυνατές τιμές του Α είναι οι 216 και 612. Επομένως η μικρότερη δυνατή τιμή του Α είναι **216.**

Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (γ). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4, οι δυνατές τιμές του Α πρέπει να έχουν τελευταίο διψήφιο τμήμα το 12 ή το 32. Όμως για τον προσδιορισμό της μεγαλύτερης δυνατής τιμής του Α πρέπει το πρώτο ψηφίο του να είναι το 3. Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α είναι **32112**.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{B}\Delta$.

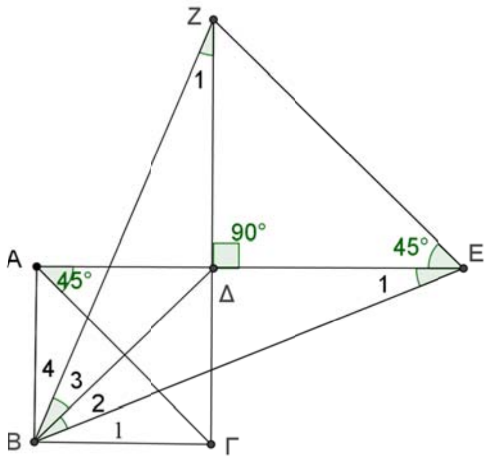


(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ και $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή $\mathrm{AE} \parallel \mathrm{B}\Gamma$ και τέμνονται από την ευθεία ΒΕ έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, δηλαδή

$$\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1 \qquad (1)$$

Επειδή από υπόθεση $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{B}$, το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{E}}_1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα:

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{B}}_1 \qquad (3)$$

Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές ($\mathrm{B}\Gamma = \Gamma\Delta,\ \hat{\Gamma} = 90^\circ$) θα έχουμε:

$$\Gamma\hat{B}\Delta \equiv \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 45^\circ \overset{(3)}{\Rightarrow} 2\cdot\Gamma\hat{B}\Delta = 45^\circ \Rightarrow \Gamma\hat{B}\Delta = 22{,}5^\circ$$

Με το ίδιο σκεπτικό όπως προηγουμένως έχουμε ότι $\hat{B}_3 = \hat{Z}_1$, αφού ΔΒ = ΓΖ, $\hat{B}_4 = \hat{Z}_1$, αφού $AB \parallel \Gamma Z$. Επίσης είναι $A\hat{B}\Delta = \hat{B}_3 + \hat{B}_4 = 45^\circ$, οπότε λαμβάνουμε τελικά $\Delta\hat{Z}B = \hat{Z}_1 = 22{,}5^\circ$.

(β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΓΑ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια ισοσκελή θα έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}Z = 45^\circ$, οπότε οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ τεμνόμενες από την ευθεία ΑΕ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

Λύση

Έστω ότι η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β είναι x χιλιόμετρα. Με την ταχύτητα που έτρεχε ο πεζοπόρος θα κάλυπτε την απόσταση σε $\frac{x}{4}$ ώρες, οπότε η ώρα που ξεκινούσε από το χωριό Α και η ώρα αναχώρησης του τρένου διέφεραν κατά $\frac{x}{4}-1$ ώρες.

Μετά την πρώτη ώρα ο χρόνος που είχε ο πεζοπόρος για να φθάσει έγκαιρα στο σταθμό ήταν $\left(\frac{x}{4}-1\right)-1=\frac{x}{4}-2$ ώρες. Τα χιλιόμετρα που απέμεναν ήταν $x-4$ και για να τα καλύψει ο πεζοπόρος χρειάστηκε $\frac{x-4}{6}$ ώρες. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}-2-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2}+2 \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{12}-\frac{2x-8}{12}=\frac{30}{12} \Leftrightarrow 3x-(2x-8)=30 \Leftrightarrow 3x-2x+8=30 \Leftrightarrow x=22.$$

Επομένως η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β ήταν 22 χιλιόμετρα.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3},\ \gamma=-\frac{27}{16}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=-\frac{27}{8},\ \gamma=-\frac{27}{16},$$

οπότε οι δύο όροι του Α γίνονται:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\left(\frac{81}{16}\right)^3+\left(-\frac{27}{8}\right)^3+\left(-\frac{27}{16}\right)^3=\left(\frac{3^4}{2^4}\right)^3+\left(-\frac{3^3}{2^3}\right)^3+\left(-\frac{3^3}{2^4}\right)^3$$

$$=\frac{3^{12}}{2^{12}}-\frac{3^9}{2^9}-\frac{3^9}{2^{12}}=\frac{3^{12}}{2^{12}}-\frac{2^3\cdot 3^9}{2^{12}}-\frac{3^9}{2^{12}}=\frac{3^{12}-2^3\cdot 3^9-3^9}{2^{12}}$$

$$=\frac{3^9\cdot\left(3^3-2^3-1\right)}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot(27-8-1)}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot 18}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot 3^2\cdot 2}{2^{12}}=\frac{3^{11}}{2^{11}},$$

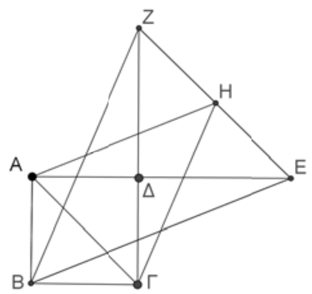
$$\alpha\beta\gamma=\frac{81}{16}\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)\cdot\left(-\frac{27}{16}\right)=\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{3^3}{2^3}\cdot\frac{3^3}{2^4}=\frac{3^{10}}{2^{11}}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\frac{3^{11}}{2^{11}}}{\frac{3^{10}}{2^{11}}}=\frac{3^{11}\cdot 2^{11}}{3^{10}\cdot 2^{11}}=3$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{B}\Delta$. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:



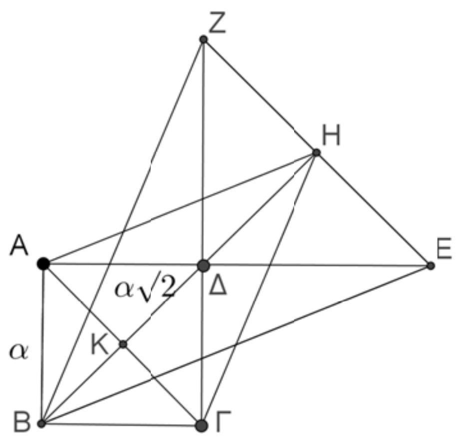
(α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ

(γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση



Σχήμα 1

(α) Από την υπόθεση έχουμε: $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = \alpha$ και $B\Delta = \Delta E = \Delta Z = \alpha\sqrt{2}$. Τότε είναι $AE = \alpha + \alpha\sqrt{2}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$$BE = \sqrt{\left(\alpha + \alpha\sqrt{2}\right)^2 + \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2\left(4 + 2\sqrt{2}\right)} = \alpha\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

(β) Επειδή Η είναι το μέσο της βάσης ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ η ευθεία ΔΗ θα είναι μεσοκάθετη της βάσης Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\Delta E = \Delta Z = \alpha\sqrt{2}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι:

$$EZ = \sqrt{E\Delta^2 + \Delta Z^2} = \sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha^2} = 2\alpha .$$

Όμως και το τρίγωνο ΔΗΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, (ΔΗ κάθετη στη βάση ΕΖ και $\Delta\hat{E}H = 45^\circ$), οπότε ότι: $\Delta H = HE = \frac{EZ}{2} = \alpha$. Έτσι έχουμε $\Delta H = \alpha = \Delta A = \Delta\Gamma$, οπότε το Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ.

(γ) Η ευθεία ΒΗ είναι μεσοκάθετη της διαγωνίου ΑΓ και έστω ότι την τέμνει στο σημείο Κ. Ομοίως όπως στο ερώτημα (α), μπορούμε να βρούμε ότι:

$$BZ = \alpha\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = BE .$$

Επομένως και το σημείο Β ανήκει στη μεσοκάθετη του ΕΖ, οπότε τα σημεία Β, Δ και Η είναι συνευθειακά. Τότε είναι

$$KH = K\Delta + \Delta H = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \alpha = \frac{\alpha\left(2 + \sqrt{2}\right)}{2}, BH = B\Delta + \Delta H = \alpha\sqrt{2} + \alpha,\ A\Gamma = \alpha\sqrt{2},$$

Επομένως, έχουμε

$$E\left(A\Gamma H\right) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\sqrt{2}\cdot\frac{\alpha\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\left(1+\sqrt{2}\right)}{2},$$

$$E\left(BEZ\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\left(\alpha + \alpha\sqrt{2}\right) = \alpha^2\left(1+\sqrt{2}\right),$$

οπότε ο ζητούμενος λόγος εμβαδών είναι: $\frac{E\left(BEZ\right)}{E\left(A\Gamma H\right)} = 2$.

Πρόβλημα 3

(α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

(β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

Λύση

(α) Τα πολλαπλάσια του 9 μεταξύ 1 και $10^5 = 100000$ είναι της μορφής $9x$, όπου x θετικός ακέραιος. Έχουμε

$$1 < 9x < 100000 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < \frac{100000}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < 11111 + \frac{1}{9} \Leftrightarrow x \in \{1, 2, ..., 11111\},$$

αφού ο x είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9.

(β) Βρήκαμε στο ερώτημα (α) ότι μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9. Ομοίως βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 16666 πολλαπλάσια του 6. Από τα παραπάνω πολλαπλάσια, μετριούνται δύο φορές αυτά που είναι κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 9. Αυτά είναι τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ(6,9) = 18. Όπως στο ερώτημα (α), βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 5555 πολλαπλάσια του 18. Επομένως μεταξύ των αριθμών 1 και 100000 υπάρχουν

$$11111+16666-5555=27777-5555=22222$$

πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9.

Πρόβλημα 4

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, βλέπει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Λύση (1$^{\text{ος}}$ τρόπος)

Έστω x τα χιλιόμετρα είναι η απόσταση από το σπίτι στο σχολείο.

Με τα πόδια ο Γιώργος κάνει τη διαδρομή σε $\frac{x}{6}$ ώρες. Αν συνεχίσει την αρχική πορεία του, αφού έχει διανύσει τα $\frac{\alpha}{100}$ θα χρειαστεί ακόμη

$$\frac{x}{6}-\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{x}{6}=\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{x}{6}\ \text{ ώρες}$$

για να φθάσει στο σχολείο.

Αν επιστρέψει να πάρει το ποδήλατο, θα χρειαστεί $\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{x}{6}$ ώρες να φθάσει στο σημείο που ξεκίνησε και στη συνέχεια θα χρειαστεί άλλες $\frac{x}{15}$ ώρες για να φθάσει στο σχολείο του. Άρα ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί θα είναι:

$$\frac{\alpha x}{600}+\frac{x}{15}=\left(\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\right)\cdot x\ \text{ ώρες.}$$

Για να τον συμφέρει η χρησιμοποίηση του ποδηλάτου πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\right)\cdot x\le\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{x}{6}\overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow}\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\le\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\le\frac{100-\alpha}{600}\Leftrightarrow\alpha+40\le 100-\alpha\Leftrightarrow 2\alpha\le 60\Leftrightarrow\alpha\le 30.$$

2$^{\text{ος}}$ τρόπος

Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος αποφάσισε να επιστρέψει σπίτι όταν είχε καλύψει x χιλιόμετρα και ότι από εκείνο το σημείο ως το σχολείο η απόσταση είναι y χιλιόμετρα. Επομένως, αν συνέχιζε το περπάτημα, για να φτάσει στο σχολείο ήθελε ακόμη χρόνο $\frac{y}{6}$ (απόσταση προς ταχύτητα). Ενώ τελικά έκανε χρόνο $\frac{x}{6}$ μέχρι να γυρίσει ξανά στο σπίτι και επιπλέον $\frac{x+y}{15}$ μέχρι να φτάσει από το σπίτι στο σχολείο με το ποδήλατο, δηλαδή ο χρόνος που έκανε συνολικά είναι

$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}$. Για να τον συμφέρει αυτό, θα πρέπει αυτός ο χρόνος να είναι μικρότερος ή ίσος από τον χρόνο που χρειαζόταν αν συνέχιζε με τα πόδια, δηλαδή η επιλογή του ήταν καλή αν

$$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}\leq\frac{y}{6}\Leftrightarrow 5x+2(x+y)\leq 5y\Leftrightarrow 7x\leq 3y\Leftrightarrow 10x\leq 3x+3y\Leftrightarrow\frac{x}{x+y}\leq\frac{3}{10},$$

δηλαδή αν το ποσοστό είναι μικρότερο ή ίσο του 30%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$x^2+4x-9=4|x|.$$

Λύση

Για $x\geq 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2-9=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-3,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η λύση: $x=3$.

Για $x<0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2+8x-9=0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta=64+36=100$. Επομένως, η εξίσωση αυτή έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$, τις

$$x=\frac{-8\pm 10}{2}\Leftrightarrow x=-9 \text{ ή } x=1,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η $x=-9$.

Επομένως, η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $x=3$ και $x=-9$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc}=100a+10b+c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση με αγνώστους τα ψηφία του αριθμού γράφεται:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c\Leftrightarrow 100a+10b+c=(a+b+c)^2+a+b+c$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2=99a+9b\Leftrightarrow (a+b+c)^2=9(11a+b).$$

Επειδή $1\leq a\leq 9, 0\leq b\leq 9$, από την τελευταία ισότητα μπορούμε να έχουμε έναν περιορισμό για τον αριθμό $(a+b+c)^2$. Πράγματι, έχουμε

$$9\cdot(11\cdot 1+0)=99\leq 9(11a+b)\leq 9(11\cdot 9+9)=972$$

$$\Rightarrow 99\leq (a+b+c)^2\leq 972\Rightarrow 10\leq a+b+c\leq 31$$

Όμως είναι $a+b+c\leq 27$, οπότε: $10\leq a+b+c\leq 27$.

Επίσης από την ισότητα $(a+b+c)^2=9(11a+b)$ προκύπτει ότι ο αριθμός $(a+b+c)^2$ είναι πολλαπλάσιο του 9, οπότε ο αριθμός $a+b+c$ θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν ήταν $a+b+c\neq 3k$, όπου k θετικός ακέραιος, τότε θα είχαμε τις περιπτώσεις $a+b+c=3k+1$ ή $a+b+c=3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$, από τις οποίες έπεται ότι $(a+b+c)^2 = πολ.3+1$, δηλαδή $(a+b+c)^2 \neq πολ.9$, δηλαδή ο αριθμός $(a+b+c)^2$ δεν θα ήταν πολλαπλάσιο του 9, άτοπο. Επομένως οι δυνατές τιμές του αθροίσματος $a+b+c$ είναι οι: 12, 15, 18, 21, 24, 27.

- Αν $a+b+c=12$, τότε $11a+b=16 \Leftrightarrow a=1, b=5$, οπότε $c=6$ και $\overline{abc}=156$
- Αν $a+b+c=15$, τότε $11a+b=25 \Leftrightarrow a=2, b=3$, οπότε $c=10$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=18$, τότε $11a+b=36 \Leftrightarrow a=3, b=3$, οπότε $c=12$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=21$, τότε $11a+b=49 \Leftrightarrow a=4, b=5$, οπότε $c=12$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=24$, τότε $11a+b=64 \Leftrightarrow a=5, b=9$, οπότε $c=10$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=27$, τότε $11a+b=81 \Leftrightarrow a=7, b=4$, οπότε $c=16$, άτοπο.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο **156.**

Πρόβλημα 3

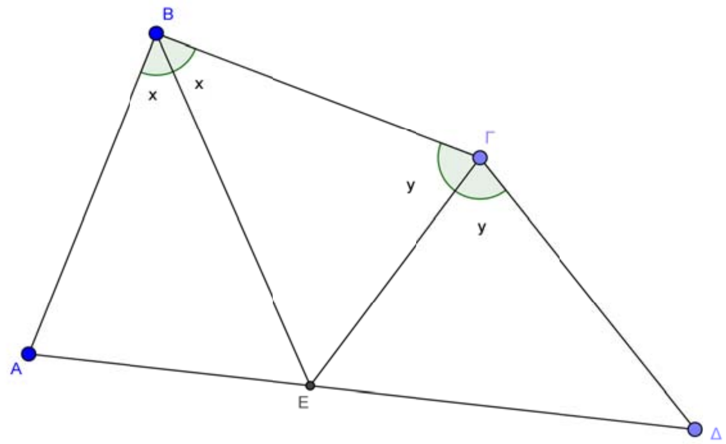
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ώστε $\hat{B}+\hat{\Gamma}=240°$ και $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται πάνω στην πλευρά $A\Delta$.

Λύση

Έστω οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται στο E. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά, δηλαδή το Ε βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΑΔ. Έχουμε $A\hat{B}E = E\hat{B}\Gamma = x$ και $E\hat{\Gamma}B = E\hat{\Gamma}\Delta = y$ με $x+y=120°$.Τα τρίγωνα $ABE, B\Gamma E$ είναι ίσα, αφού έχουν $AB=B\Gamma$, BE κοινή και την περιεχόμενη γωνία ίση. Επομένως θα είναι $B\hat{A}E = y$ και από το τρίγωνο BAE έχουμε $A\hat{E}B = 180° - x - y = 60°$. Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε $B\hat{E}\Gamma = B\hat{E}A = 60°$.

Όμοια τα τρίγωνα $BE\Gamma, \Gamma\Delta E$ είναι ίσα αφού έχουν $B\Gamma = \Gamma\Delta$, ΓE κοινή και την περιεχόμενη γωνία ίση λόγω διχοτόμου. Άρα θα είναι: $\Gamma\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{E}B = 60°$.

Επομένως $A\hat{E}B + B\hat{E}\Gamma + \Gamma\hat{E}\Delta = 60° + 60° + 60° = 180°$ και άρα το E ανήκει στην $A\Delta$.



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4
Δύο φίλοι Α και Β ανέλαβαν την εκτέλεση ενός έργου. Ο Β ξεκίνησε να εργάζεται μία ώρα μετά το ξεκίνημα του Α. Τρεις ώρες μετά το ξεκίνημα της εργασίας του Α διαπίστωσαν ότι έχουν ακόμη να εκτελέσουν τα $\frac{9}{20}$ του έργου. Όταν τελείωσε το έργο διαπίστωσαν ότι ο καθένας τους είχε εκτελέσει το μισό του έργου. Να βρείτε σε πόσες ώρες μπορεί ο καθένας από του δύο φίλους να τελειώσει το έργο, αν εργάζεται μόνος του.

Λύση.
Έστω ότι για την αποπεράτωση του έργου, ο Α, αν εργάζεται μόνος του, χρειάζεται x ώρες και ο Β, αν εργάζεται μόνος του, χρειάζεται y ώρες. Τότε σε μία ώρα ο Α θα εκτελεί το $\frac{1}{x}$ του έργου, ενώ ο Β θα εκτελεί το $\frac{1}{y}$ του έργου. Έτσι 3 ώρες μετά την έναρξη εργασίας του Α αυτός θα έχει εκτελέσει τα $\frac{3}{x}$ του έργου, ενώ ο Β θα έχει εργαστεί 2 ώρες και θα έχει εκτελέσει τα $\frac{2}{y}$ του έργου. Σύμφωνα με την υπόθεση, σε 3 ώρες το μέρος του έργου που έχει εκτελεστεί είναι $1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$, οπότε θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20} \qquad (1)$$

Επειδή στο τελείωμα του έργου ο καθένας έχει εκτελέσει το μισό μέρος του έργου, θα έχουν εργαστεί ο Α $\frac{x}{2}$ ώρες και ο Β $\frac{y}{2}$ ώρες, αντίστοιχα. Επομένως, θα έχουμε

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1 \qquad (2)$$

Άρα έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20}\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20(2x+3y)=11xy\\ x-y=2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20(2x+3y)=11xy\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20(2x+3(x-2))=11x(x-2)\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}100x-120=11x^2-22x\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}11x^2-122x+120=0\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x^2-\left(10+\frac{12}{11}\right)x+10\cdot\frac{12}{11}=0\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=10 \text{ ή } x=\frac{12}{11}\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow (x,y)=(10,8)$, αφού η λύση $x=\frac{12}{11}$ απορρίπτεται, γιατί σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει να είναι $x>3$. Άρα, ο Α τελειώνει μόνος του το έργο σε 10 ώρες και Β το τελειώνει μόνος του σε 8 ώρες.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των παραμέτρων $a,b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$, έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + ax + b = a|x|$$

να έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Είναι δυνατόν η εξίσωση να έχει τρεις διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $a \neq 0$ και $b \neq 0$.

Για $x \geq 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + b = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-b}, \text{ εφόσον } b < 0. \qquad (1)$$

Επομένως η εξίσωση έχει μία μόνο θετική ρίζα στο $\mathbb{R}$ την $x = \sqrt{-b}$, αν, και μόνον αν, $b < 0.$ Αν $b > 0$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση στους πραγματικούς αριθμούς.

Για $x < 0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2 + 2ax + b = 0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta = 4(a^2 - b)$. Επομένως, η εξίσωση (2) έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν και μόνον αν, $a^2 > b$. Όμως για να έχει δύο αρνητικές ρίζες $x_1 < x_2 < 0$ στο $\mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί

$$\Delta = 4(a^2 - b) > 0,\ x_1 + x_2 = -2a < 0 \text{ και } x_1x_2 = b > 0 \Leftrightarrow a^2 > b,\ a > 0, b > 0.$$

Η εξίσωση (2) έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, αν και μόνον αν,

$$a^2 > b \text{ και } b < 0 \Leftrightarrow b < 0.$$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων έχουμε:

- Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις, αν και μόνον αν,

$$a^2 > b, a > 0, b > 0 \quad \text{ή} \quad b < 0.$$

- Η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις, αν και μόνον αν,

$$a^2 > b, a > 0, b > 0 \text{ και } b < 0, \ \textbf{(αδύνατο).}$$

Άρα η εξίσωση **δεν είναι δυνατόν** να έχει τρεις διαφορετικές λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017} + 2017 = 0 \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2017}^4 = (-x_1)^3 + (-x_2)^3 + \ldots + (-x_{2017})^3 \end{array} \right\}.$$

Λύση

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \ldots + (x_{2017} + 1) = 0. \qquad (1)$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται:

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2017}^4 = -x_1^3 - x_2^3 + \ldots - x_{2017}^3$$

$$x_1^4 + x_1^3 + x_2^4 + x_2^3 + \ldots + x_{2017}^4 + x_{2017}^3 = 0$$

$$x_1^3(x_1 + 1) + x_2^3(x_2 + 1) + \ldots + x_{2017}^3(x_{2017} + 1) = 0 \qquad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$(x_1+1)\left(x_1^3+1\right)+(x_2+1)\left(x_2^3+1\right)+\ldots+(x_{2017}+1)\left(x_{2017}^3+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+1)^2\left(x_1^2-x_1+1\right)+(x_2+1)^2\left(x_2^2-x_2+1\right)+\ldots+(x_{2017}+1)^2\left(x_{2017}^2-x_{2017}+1\right)=0$$

Επειδή ισχύει ότι: $x_i^2-x_i+1=\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, για κάθε $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,2017$,

η τελευταία εξίσωση αληθεύει, αν, και μόνον αν,

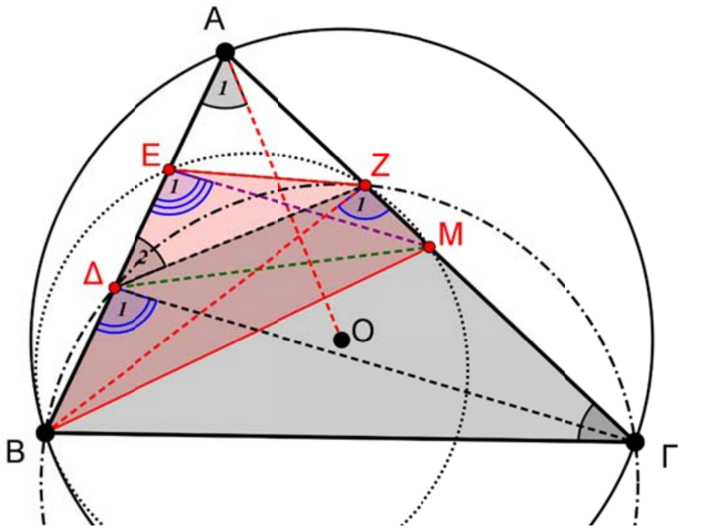
$$x_i+1=0,\ i=1,2,\ldots,2017 \Leftrightarrow x_i=-1,\ i=1,2,\ldots,2017 \Leftrightarrow x_1=x_2=\ldots=x_{2017}=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(Ο,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη στην ακτίνα ΟΑ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και Μ το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

.

Λύση



Σχήμα 4

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι εγγράψιμο. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε: $\widehat{\mathrm{A}}_1=90°-\widehat{\Gamma}$. Από την καθετότητα των ΟΑ και ΔΖ έχουμε: $\widehat{\Delta}_2=90°-\widehat{\mathrm{A}}_1$. Από τις παραπάνω ισότητες γωνιών, συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{\Delta}_2=\widehat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια, το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική).

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΔΖΓ, έχουμε: $\widehat{\Delta}_1=\widehat{\mathrm{Z}}_1$. (η ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ, Ζ υπό ίσες γωνίες)

Στο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΕΜ συνδέει τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΑΓ, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΔΓ, δηλαδή ΕΜ∥ΔΓ.

Από την παραλληλία ΕΜ∥ΔΓ, συμπεραίνουμε ότι : $\widehat{\Delta}_1=\widehat{\mathrm{E}}_1$ (εντός εκτός επί τα αυτά γωνίες).

Άρα είναι: $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ και επομένως τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ρητών (a,b) που είναι τέτοια ώστε οι αριθμοί $\frac{ab+1}{a}$ και $\frac{ab+1}{b}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

Λύση

Αφού οι αριθμοί

$$\frac{ab+1}{a} = p \text{ και } \frac{ab+1}{b} = q \qquad (1)$$

είναι θετικοί ακέραιοι, και το γινόμενό τους θα είναι θετικός ακέραιος. Δηλαδή, το κλάσμα $\frac{(ab+1)^2}{ab}$ είναι θετικός ακέραιος. Θέτουμε $ab = x$ και τότε

$$\frac{(x+1)^2}{x} = k,\ k > 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Η τελευταία γράφεται:

$$x^2 + 2x + 1 = kx \Leftrightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0. \qquad (2)$$

Ζητάμε η (2) να έχει ρητές λύσεις, επομένως η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Επομένως $(2-k)^2 - 4 = s^2$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο s.

Τότε $(k-2-s)(k-2+s) = 4$, επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{cases} k-2-s=1 \\ k-2+s=4 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} k-2-s=2 \\ k-2+s=2 \end{cases}$$

Η μόνη περίπτωση που δίνει λύσεις είναι η δεύτερη όπου $s = 0$ και $k = 4$.

Τότε η (2) γίνεται $(x-1)^2 = 0$, οπότε $x = 1$, δηλαδή $ab = 1$. (3)

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $\frac{2}{a} = p,\ \ \frac{2}{b} = q$, οπότε η (3) γίνεται $pq = 4$, με p,q θετικούς ακεραίους. Έπεται ότι $(p,q) \in \{(1,4),(2,2),(4,1)\}$, οπότε έχουμε:

$$(a,b) \in \left\{ \left(2,\frac{1}{2}\right),(1,1),\left(\frac{1}{2},2\right) \right\}.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^4 - 32x^2 + 257 - \frac{4|x+2|}{x^2+4x+8} = 0.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^4 - 32x^2 + 257 = \frac{4|x+2|}{x^2+4x+8} \qquad (1)$$

Το πρώτο μέλος της (1) γράφεται:

$$x^4-32x^2+257=\left(x^2-16\right)^2+1\geq 1.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=-4$ ή $x=4$.

Το δεύτερο μέλος της (1) γράφεται:

$$\frac{4|x+2|}{x^2+4x+8}=\frac{4|x+2|}{\left(x+2\right)^2+2^2}=\frac{4|x+2|}{|x+2|^2+2^2}\leq\frac{4|x+2|}{2\cdot|x+2|\cdot 2}=1.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $|x+2|=2 \Leftrightarrow x+2=\pm 2 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-4$.

Επομένως η εξίσωση (1) έχει λύση, αν και μόνον αν, και τα δύο μέλη της είναι ίσα με 1, δηλαδή αν και μόνον αν $x=-4$.

Πρόβλημα 2.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\sqrt{n\left(n+182\right)}$ είναι ρητός.

Λύση

Για να είναι ο αριθμός Α ρητός, πρέπει και αρκεί να υπάρχει $k\in\mathbb{Q}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{A}=\sqrt{n\left(n+182\right)}=k \Leftrightarrow n\left(n+182\right)=k^2. \qquad (1)$$

Επειδή ο αριθμός $n\left(n+182\right)$ είναι θετικός ακέραιος, ο αριθμός k είναι ακέραιος.

Πράγματι, αν ήταν $k=\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu,\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\left(\mu,\nu\right)=1$, τότε θα είχαμε

$$\frac{\mu^2}{\nu^2}=n\left(n+182\right)\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \nu^2\,|\,\mu^2 \overset{(\mu,\nu)=1}{\Rightarrow} \nu\,|\,\mu \Rightarrow \nu=1.$$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$n\left(n+182\right)=k^2 \Leftrightarrow n^2+182n=k^2 \Leftrightarrow \left(n+91\right)^2-k^2=91^2$$

$$\Leftrightarrow \left(n+91-k\right)\left(n+91+k\right)=91^2=7^2\cdot 13^2.$$

Επειδή $n+91-k<n+91+k$, η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με τα συστήματα

$$\left\{\begin{matrix} n+91-k=7 \\ n+91+k=7\cdot 13^2\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=13 \\ n+91+k=7^2\cdot 13\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=7^2 \\ n+91+k=13^2\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=1 \\ n+91+k=7^2\cdot 13^2\end{matrix}\right\}$$

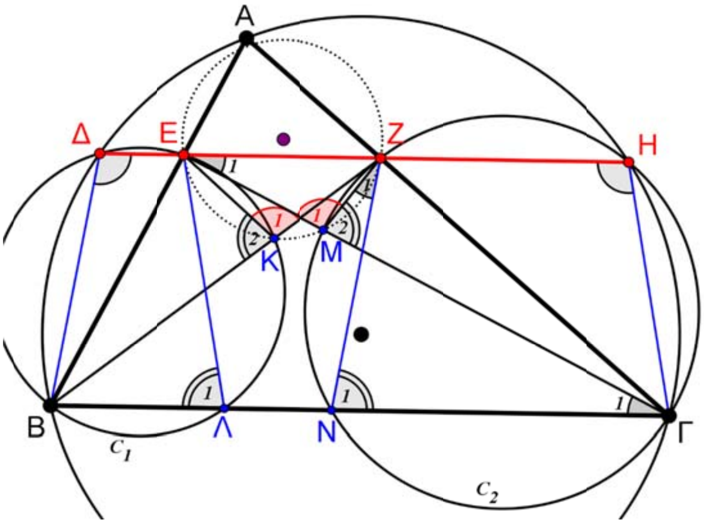
$$\Leftrightarrow \left(n,k\right)=\left(504,588\right) \text{ ή } \left(n,k\right)=\left(234,312\right) \text{ ή } \left(n,k\right)=\left(18,60\right) \text{ ή } \left(n,k\right)=\left(4050,4140\right)$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι 18, 234, 504 και 4050.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ του μικρού τόξου ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, την ΑΓ στο Ζ και τον περιγεγραμμένο κύκλο c(O,R) (για δεύτερη φορά) στο Η. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου ΒΔΕ τέμνει την ΒΖ στο Κ και την ΒΓ στο Λ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_2 του τριγώνου ΓΖΗ τέμνει την ΕΓ στο Μ και την ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Μ, Ζ, Ε βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο, στον οποίο εφάπτεται η ευθεία ΝΖ.

Λύση



Σχήμα 5

Το τραπέζιο ΒΓΗΔ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ), οπότε ΔΒ=ΗΓ και $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{H}}$.

Το τραπέζιο ΒΔΕΛ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου C_1(ΒΔΕ), οπότε ΔΒ=ΕΛ και $\widehat{\Lambda}_1 = 180° - \widehat{\Delta}$.

Το τραπέζιο ΖΗΓΝ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου C_2(ΖΗΓ), οπότε ΖΝ=ΗΓ και $\widehat{\mathrm{N}}_1 = 180° - \widehat{\mathrm{H}}$. Άρα είναι: $\widehat{\Lambda}_1 = \widehat{\mathrm{N}}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΕΚΛ, έχουμε: $\widehat{\mathrm{K}}_2 = \widehat{\Lambda}_1$. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΓΖΜΝ, έχουμε: $\widehat{\mathrm{M}}_2 = \widehat{\mathrm{N}}_1$. Από τις τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών, συμπεραίνουμε ότι:

$$\widehat{\mathrm{K}}_2 = \widehat{\mathrm{M}}_2 \Leftrightarrow 180° - \widehat{\mathrm{K}}_1 = 180° - \widehat{\mathrm{M}}_1 \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{K}}_1 = \widehat{\mathrm{M}}_1.$$

Άρα τα σημεία Κ,Μ,Ε,Ζ βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΓΖΜΝ, έχουμε: $\mathrm{M}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{N} = \hat{\mathrm{Z}}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$. . Από την παραλληλία ΕΒ και ΗΓ έχουμε: $\hat{\mathrm{E}}_1 = \mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \hat{\Gamma}_1$. Επομένως έχουμε ότι: $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{N}$, δηλαδή η εγγεγραμμένη γωνία $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ στον κύκλο c_1 ισούται με τη γωνία ΜΖΝ που έχει πλευρές τη χορδή ΜΖ του κύκλου c_1 και την ευθεία ΝΖ και επιπλέον περιέχει το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{MZ}}$. Άρα η ΖΝ εφάπτεται στον κύκλο που ανήκουν τα σημεία Κ, Μ, Ζ, Ε.

Πρόβλημα 4

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την ισότητα

$$f\left(2xf\left(y\right)+y\right)+f\left(2x\left(y+1\right)\right)=f\left(2x+y\right)+4xy, \qquad (1)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a)=1$.

(ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

(i) Παρατηρούμε ότι υπάρχουν τιμές των x, y τέτοιες ώστε $2x(y+1)=2x+y$.
Πράγματι,

$$2x(y+1)=2x+y \Leftrightarrow 2xy+2x=2x+y \Leftrightarrow 2xy=y \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}, y\in\mathbb{R} \text{ ή } x\in\mathbb{R}, y=0.$$

Επειδή θέλουμε να βρούμε ζευγάρι (x,y) τέτοιο ώστε $4xy=1$, παίρνουμε τις τιμές $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$. Με αυτές τις τιμές η σχέση (1) γίνεται:

$$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)+1 \Leftrightarrow f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)=1,$$

δηλαδή για το $a=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ ισχύει ότι: $f(a)=1$.

Διαφορετικά, αν θεωρήσουμε το ζευγάρι με $\left(\frac{1}{2}, y\right), y\in\mathbb{R}$ στη σχέση (1), τότε λαμβάνουμε την σχέση

$$f\left(f(y)+y\right)=2y, \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R},$$

από την οποία έπεται ότι η συνάρτηση είναι επί του $\mathbb{R}$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε παίρνει και την τιμή 1. Αυτό εύκολα προκύπτει από την παραπάνω σχέση για $y=\frac{1}{2}$.

(ii) Από τη σχέση (1) για $y=a$ και $x\in\mathbb{R}$, λαμβάνουμε:

$$f(2x+a)+f\left(2x(a+1)\right)=f(2x+a)+4xa \Leftrightarrow f\left(2x(a+1)\right)=4xa. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι είναι $a\neq -1$, αφού αν ήταν $a=-1$, τότε $f(0)=-2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άτοπο. Επομένως μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (2) $x=\frac{t}{2(a+1)}, t\in\mathbb{R}$,οπότε λαμβάνουμε:

$$f(t)=\left(\frac{2a}{a+1}\right)t=ct,\ t\in\mathbb{R},\ c=\frac{2a}{a+1}.$$

Επειδή η συνάρτηση f πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση (1), έχουμε:

$$c(2xcy+y)+2cxy+2cx=2cx+cy+4xy, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(c^2+c-2\right)xy=0, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow c=1 \text{ ή } c=-2.$$

Άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι: $f(x)=x, x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-2x, x\in\mathbb{R}$.