ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha-11\beta}{\beta}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$.

Λύση
1ος Τρόπος

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}-11\right)=(2+10)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(10-11)$$
$$=12\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot500-18\cdot(-1)=2000+18=2018.$$

2ος Τρόπος
Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=10\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+10\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{10\beta-11\beta}{\beta}\right)=\left(\frac{12\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{-\beta}{\beta}\right)$$
$$=\frac{12}{1}\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot500+18=2000+18=2018.$$

Πρόβλημα 2.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Λύση

Το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου Α γράφεται:

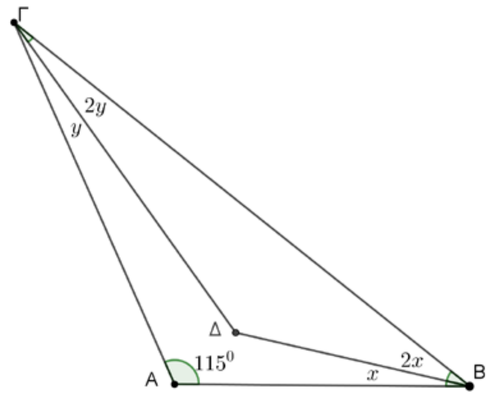
$$\Gamma=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18\cdot20=2\cdot2^2\cdot2\cdot3\cdot2^3\cdot2\cdot5\cdot2^2\cdot3\cdot2\cdot7\cdot2^4\cdot2\cdot3^2\cdot2^2\cdot5=2^{18}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

Στο τελευταίο γινόμενο πρώτων παραγόντων πρέπει οι εκθέτες να είναι άρτιοι , οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει σίγουρα να αφαιρεθεί ο παράγοντας 7, ο οποίος υπάρχει μόνο στην ανάλυση του 14. Επομένως πρέπει να αφαιρεθεί ο αριθμός 14. Τότε το γινόμενο που προκύπτει είναι $\Gamma = 2^{17}\cdot 3^4 \cdot 5^2$ στο οποίο ο εκθέτης του 2 είναι περιττός. Για να γίνει άρτιος πρέπει να αφαιρεθεί περιττός αριθμός παραγόντων ίσων με 2. Για αυτό έχουμε δύο επιλογές. Η μία είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 2 και η άλλη είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 8. Στην πρώτη περίπτωση το γινόμενο που θα προκύψει είναι το $\Gamma_1 = 2^{16}\cdot 3^4\cdot 5^2 = \left(2^8\cdot 3^2\cdot 5\right)^2$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το γινόμενο είναι $\Gamma_2 = 2^{14}\cdot 3^4\cdot 5^2 = \left(2^7\cdot 3^2\cdot 5\right)^2$. Επομένως ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων του συνόλου Α που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι 2, δηλαδή τους αριθμούς 2 και 14 ή τους αριθμούς 8 και 14.

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2\cdot\Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 2\cdot\Delta\hat{\Gamma}A$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 1

Αν θέσουμε $\Delta\hat{B}A = x$, τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2\cdot\Delta\hat{B}A = 2x$. Ομοίως, αν $\Delta\hat{\Gamma}A = y$. τότε $\Delta\hat{\Gamma}B = 2\cdot\Delta\hat{\Gamma}A = 2y$.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\hat{A} + 3x + 3y = 180^\circ \Rightarrow 3\left(x+y\right) = 180^\circ - 115^\circ \Rightarrow x + y = \frac{65^\circ}{3}.$$

Από το τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2\left(x+y\right) = 180^\circ - 2\cdot\frac{65^\circ}{3} = 180^\circ - \frac{130^\circ}{3} = \frac{410^\circ}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρεθεί πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του..

Λύση

Έστω x τα κέρματα των δύο ευρώ που είχε αρχικά. Αφού χρησιμοποίησε το ένα τρίτο αυτών, σημαίνει ότι το x είναι πολλαπλάσιο του 3 και ότι το ένα τρίτο αυτών ισούται με $\frac{x}{3}$ και αυτά έχουν αξία $\frac{2x}{3}$. Η αξία των χρημάτων που έδωσε την πρώτη μέρα είναι $\frac{2x}{3}$, επομένως τη δεύτερη μέρα του απέμειναν $\frac{2x}{3}\cdot 2+40-x=40+\frac{x}{3}$ ευρώ. Αφού ξόδεψε το 40% αυτών, τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\left(40+\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{4}{10}=16+\frac{2x}{15}$ ευρώ. Επομένως συνολικά, την πρώτη και τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $2\cdot\frac{x}{3}+16+\frac{2x}{15}=16+\frac{12x}{15}$ ευρώ.

Από την εκφώνηση ξέρουμε τώρα ότι ξόδεψε 40 ευρώ, οπότε

$$16+\frac{12x}{15}=40\Leftrightarrow\frac{12x}{15}=24\Leftrightarrow 12x=360\Leftrightarrow x=30.$$

Επομένως είχε αρχικά μαζί του 30 κέρματα των δύο ευρώ και 10 κέρματα του ενός ευρώ με συνολική αξία 70 ευρώ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\gamma=-\frac{18}{2^3}$, $\delta=\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$, $\gamma=-\frac{18}{8}=-\frac{9}{4}$, $\delta=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64}\ ,\ \gamma^2+\delta^2=\left(-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64},$$

$$\alpha\gamma+\beta\delta=\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{8}=-\frac{81}{16}-\frac{1}{64}=-\frac{325}{64}\Rightarrow\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\left(-\frac{325}{64}\right)^2.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\frac{325}{64}\cdot\frac{325}{64}-\left(-\frac{325}{64}\right)^2=0$.

2ος Τρόπος

$$\mathrm{A}=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=$$

$$= \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta - \beta^2\delta^2 =$$
$$= \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8} - \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8}\right)^2 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Μία ομάδα α εργατών τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ιδίας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Λύση

Έχουμε τα ακόλουθα δεδομένα:

Η μία ομάδα = α εργάτες τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας

Πόσοι εργάτες (έστω x) τελειώνουν 15 έργα σε 5 ημέρες;

Επειδή τα ποσά**: εργάτες – έργο, είναι ανάλογα**, ενώ τα ποσά : **εργάτες – ημέρες , είναι αντιστρόφως ανάλογα**, έχουμε ότι:

$$x = \alpha \cdot \frac{15}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{5} = \alpha \cdot 60 \cdot \frac{1}{15} = 4\alpha\ .$$

Επομένως θα χρειαστούν 4 τέτοιες ομάδες εργατών.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x > y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{P(x)-P(y)}{x-y}$ είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

(α) Έχουμε ότι

$$P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c = \alpha x^2 + (b+4a)x + 4a + 3b + c$$

Επομένως

$$P(x) - P(y) = a(x^2 - y^2) + (b+4a)(x-y) = (x-y)(a(x+y) + b + 4a),$$

οπότε

$$\frac{P(x)-P(y)}{x-y} = \frac{(x-y)(a(x+y)+b+4a)}{x-y} = a(x+y) + b + 4a$$

που είναι θετικός ακέραιος, αφού οι αριθμοί a, b, c, x, y είναι θετικοί ακέραιοι.

(β) Από το πρώτο ερώτημα, για $x = 2018,\ y = 8$ έχουμε ότι

$$\frac{P(2018) - P(8)}{2010} = \kappa \text{ ακέραιος},$$

δηλαδή

$$P(2018) - P(8) = 2010\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ ακέραιος} \Rightarrow P(2018) = P(8) + 2010\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ ακέραιος}$$

Όμως το $2010 = 3 \cdot 670$ είναι πολλαπλάσιο του 3, όπως και το $P(8)$ από την υπόθεση, οπότε και το $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και $\widehat{\text{Α}} = 72°$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

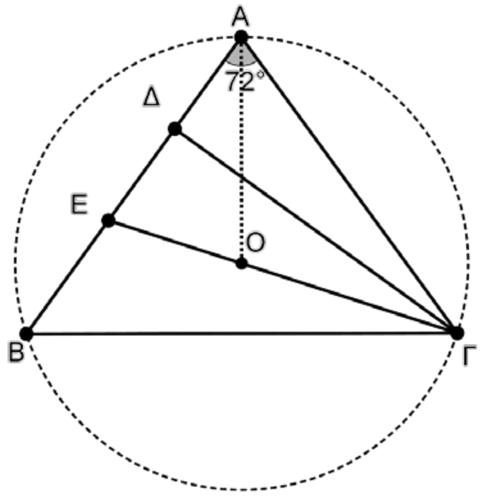
Σημείωση: *Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.*

Λύση

Θεωρούμε το ύψος από την κορυφή Α που τέμνει τη ΓΕ στο σημείο Ο. Θα αποδείξουμε ότι το Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή ότι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

Το ύψος από την κορυφή Α είναι και μεσοκάθετος της ΒΓ, άρα το Ο ως σημείο της θα ισαπέχει από τα Β,Γ, δηλαδή ΟΒ=ΟΓ.

Επιπλέον το Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ, το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{\text{ΓΕΑ}} = 72°$, οπότε $\widehat{\text{ΕΓΑ}} = 36°$ (1). Επειδή όμως η ΑΟ είναι ύψος και διχοτόμος, θα ισχύει ότι $\widehat{\text{ΟΑΓ}} = 36°$, οπότε λόγω της (1) θα ισχύει ΟΑ = ΟΓ.



Σχήμα 2

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \in \mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}$.
Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 2xy \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$a_2^2 - a_4 = (x^2+y^2)^2 - (x^4+y^4) = 2x^2y^2 \in \mathbb{Z}, \qquad (2)$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι:

$$xy = \frac{a_1^2 - a_2}{2}\ .$$

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy = \frac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2y^2 = 2 \cdot \frac{(a_1^2 - a_2)^2}{4} = \frac{(a_1^2 - a_2)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}$.
Άρα έχουμε:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x + y,\ xy \in \mathbb{Z}$. Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3 + y^3 = (x^2+y^2)(x+y) - xy(x+y) \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } x^2+y^2,\ x+y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\mathrm{A} = \kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)$ το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.
(α) Να αποδείξετε ότι ο Α ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακέραιων.
(β) Είναι δυνατόν να είναι ο Α ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3) = \kappa(\kappa+3)(\kappa+1)(\kappa+2)\\ &= \kappa(\kappa+3)(\kappa^2+3\kappa+2) = \kappa(\kappa+3)(\kappa(\kappa+3)+2)\end{aligned}$$

Επομένως ο Α ισούται με το γινόμενο των ακεραίων $\kappa(\kappa+3)$, $\kappa(\kappa+3)+2$ οι οποίοι διαφέρουν κατά 2 και επιπλέον είναι άρτιοι, αφού στο γινόμενο $\kappa(\kappa+3)$ ο ένας από τους δύο παράγοντες είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.
(β) Έστω $\kappa(\kappa+3) = 2\mu$, όπου μ θετικός ακέραιος. Τότε $\mathrm{A} = 2\mu(2\mu+2) = 4\mu(\mu+1)$

Αν ήταν ο Α τέλειο τετράγωνο ακεραίου, τότε θα είχαμε $\mathrm{A} = 4\mu(\mu+1) = (2\lambda)^2 = 4\lambda^2$, όπου

λ ακέραιος. Θα είχαμε τότε $\mu(\mu+1) = \lambda^2$, όπου μ θετικός ακέραιος και λ ακέραιος, το οποίο είναι άτοπο, γιατί

$$\mu^2 < \mu^2 + \mu = \mu(\mu+1) < (\mu+1)^2,$$

δηλαδή ο $\mu(\mu+1)$ βρίσκεται μεταξύ δύο τετραγώνων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Πρόβλημα 3

Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με $4\sqrt{10}$ μέτρα, ύψος ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R .

Λύση

Ονομάζουμε Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και θέτουμε $\mathrm{AB} = \alpha,\ \Gamma\Delta = \beta$ και φέρουμε το ύψος $\mathrm{AE} = 6$. Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές, θα ισχύει ότι ΒΓ=ΑΔ. Όμως $\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{A\Delta} = 4\sqrt{10}$, οπότε $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} = 2\sqrt{10}$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΕ παίρνουμε

$$\mathrm{AE}^2 + \mathrm{E\Delta}^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta}^2 = 40 - 36 \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta} = 2 \qquad (1)$$

Επιπλέον από τον τύπο για το εμβαδό του τραπεζίου έχουμε:

$$\mathrm{E} = \frac{(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{A\Delta}}{2} \Rightarrow 72 = \frac{(\alpha+\beta)\cdot 6}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 24 \qquad (2)$$

Αν τώρα φέρουμε την κάθετη από το Ο στις βάσεις που τις τέμνει στα μέσα τους Ν και Μ, τότε

$$\mathrm{E\Delta} = \mathrm{M\Delta} - \mathrm{ME} = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \beta - \alpha = 4 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε $\alpha = 10,\ \beta = 14$.

Αν τέλος ονομάσουμε $\mathrm{OM} = x,\ \mathrm{ON} = y$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν το Ο είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + 49 = R^2 \qquad (4)$$

και

$$y^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow y^2 + 25 = R^2 \Rightarrow (6-x)^2 + 25 = R^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 12x + 36 + 25 = R^2 \Rightarrow 61 - 12x = R^2 - x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x = 12 \Rightarrow x = 1$, οπότε από την (4) έχουμε ότι $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

(β) Αν το Ο δεν είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow x^2+49=R^2 \qquad (4)$$

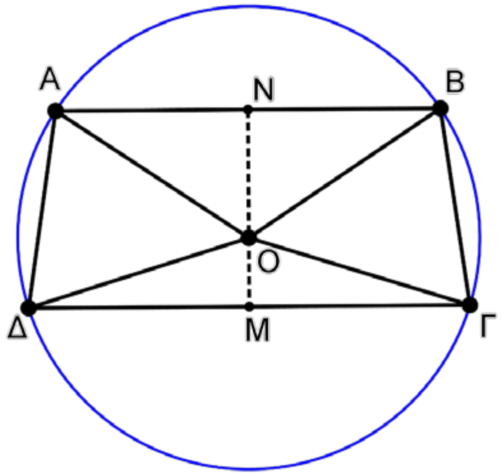
και

$$y^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow y^2+25=R^2 \Rightarrow (6+x)^2+25=R^2 \Rightarrow$$

$$x^2+12x+36+25=R^2 \Rightarrow 61+12x=R^2-x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x+12=0$, άτοπο.

Επομένως υπάρχει μόνο μία δυνατή περίπτωση στην οποία $R=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4

Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

Λύση

Θα βρούμε πρώτα έναν τετραψήφιο x τέτοιον, ώστε ο $2007x$ να λήγει σε 2008. Γράφουμε $2007x=2000x+7x$ οπότε αφού ο $2000x$ λήγει σε 000, αναζητούμε x ώστε ο $7x$ να λήγει σε 008.

Για να λήγει ο $7x$ σε 008, πρέπει ο x να λήγει σε 4. Τότε έχουμε δύο κρατούμενα, οπότε το προτελευταίο ψηφίο του x πρέπει να είναι 4. Έχουμε τρία κρατούμενα, οπότε το τρίτο από το τέλος ψηφίο του x πρέπει να είναι 1. Επομένως ο x λήγει σε 144.

Αναζητούμε λοιπόν τετραψήφιο $\overline{a144}$ τέτοιον, ώστε να πολλαπλασιάζεται με τον 2007 και ο αριθμός που προκύπτει να λήγει σε 2008. Ο $2000\cdot\overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος το τελευταίο ψηφίο του $2a$. Επιπλέον ο $7\cdot\overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος ίσο με το τελευταίο ψηφίο του $7a+1$(γιατί έχουμε και ένα κρατούμενο). Οπότε ο $2a+(7a+1)=9a+1$, πρέπει να λήγει σε 2, οπότε πρέπει $a=9$.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9144. Πράγματι, το γινόμενο $2007\cdot 9144$ ισούται με 18352008 που λήγει σε 2008.

Αν τώρα πάρουμε έναν οποιαδήποτε εξαψήφιο $\overline{\beta\gamma 9144}$ και τον πολλαπλασιάσουμε με τον 2007, τα τέσσερα τελευταία ψηφία του γινομένου δεν επηρεάζονται άρα λήγει και αυτός σε 2008. Για το διψήφιο τμήμα $\overline{\beta\gamma}$ έχουμε επιλογές από 10 έως 99. Επομένως έχουμε συνολικά 90 επιλογές, άρα έχουμε 90 εξαψήφιους με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y$, $a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_5 = x^5 + y^5$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή, έχουμε ότι:

$$x^5 + y^5 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x + y\right) - x^4 y - xy^4 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x + y\right) - xy\left(x^3 + y^3\right),$$

και οι αριθμοί $a_1 = x + y$, $a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, αρκεί να αποδείξουμε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Επειδή $x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = \left(x + y\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = 2xy \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$a_2^2 - a_4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^4 + y^4\right) = 2x^2y^2 \in \mathbb{Z}\,, \qquad (2)$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι: $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2}$.

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2y^2 = 2 \cdot \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{4} = \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}$.

Άρα έχουμε:

$$x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x + y,\ xy \in \mathbb{Z}$.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3 + y^3 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x + y\right) - xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } x^2 + y^2,\ x + y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 3} > \frac{x + a}{x^2 + x + 1}.$$

Λύση

Επειδή $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0,\ x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R},$ η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x\left(x^2+x+1\right)>\left(x^2+2x+3\right)(x+a)\Leftrightarrow x^3+x^2+x>x^3+2x^2+3x+ax^2+2ax+3a$$
$$\Leftrightarrow (a+1)x^2+2(a+1)x+3a<0. \qquad (1)$$

Για $a=-1$, η ανίσωση (1) γίνεται: $-3<0$ και αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $a\neq-1$, το πρώτο μέλος της ανίσωσης είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta=4(a+1)^2-12a(a+1)=4(a+1)(a+1-3a)=-4(a+1)(2a-1).$$

Η ανίσωση (1) αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$a+1<0 \text{ και } -4(a+1)(2a-1)<0\Leftrightarrow a+1<0 \text{ και } 4(a+1)(2a-1)>0$$
$$\Leftrightarrow a<-1 \text{ και } a<-1 \text{ ή } a>\frac{1}{2}\Leftrightarrow a<-1.$$

Επομένως το ζητούμενο αληθεύει για κάθε $a\leq-1.$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α,β ώστε $\beta=2\alpha$. Στο εσωτερικό του θεωρούμε N κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{N}\geq 4$.

Λύση

Έστω $d_1,d_2,...,d_N$ οι διάμετροι των κύκλων. Τότε το μήκος του πρώτου κύκλου είναι $2\pi R_1=\pi d_1$, το μήκος του δεύτερου $2\pi R_2=\pi d_2$, το μήκος του N-οστού είναι $2\pi R_{\mathrm{N}}=\pi d_{\mathrm{N}}$. Αφού το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου, θα έχουμε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}=2(2\alpha+2\beta)=4(\alpha+\beta)=4(\alpha+2\alpha)=12\alpha \qquad (1).$$

Για να χωράει όμως κάθε κύκλος στο ορθογώνιο θα πρέπει η διάμετρός του να είναι το πολύ όσο η μικρότερη πλευρά του ορθογωνίου, δηλαδή $d_1\leq\alpha, d_2\leq\alpha,...,d_N\leq\alpha$, οπότε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}\leq\alpha\pi+...+\alpha\pi=\mathrm{N}\alpha\pi \qquad (2)$$

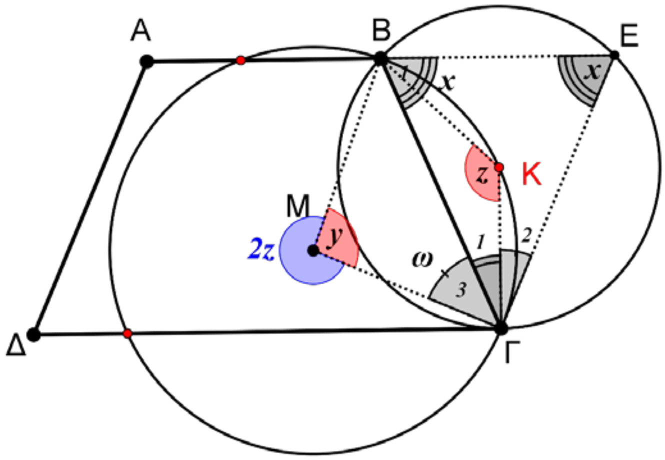
Από (1) και (2) έχουμε $\mathrm{N}\alpha\pi\geq12\alpha\Leftrightarrow\mathrm{N}\geq\frac{12}{\pi}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, $\mathrm{N}\geq4$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ για το οποίο ισχύει $ΓΔ = 2ΑΒ$. Αν $Ε$ είναι το συμμετρικό του σημείου $Α$ ως προς το $Β$ και $Κ$ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΕ$ να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου

$ΒΓΕ$ εφάπτεται στην $ΓΔ$ στο σημείο $Γ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΚ$ εφάπτεται στην $ΓΕ$ στο σημείο $Γ$.

Λύση



Σχήμα 4

Έστω $Μ$ το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΚ$.

Θα αποδείξουμε ότι $ΚΓ \perp ΓΔ$ και $ΜΓ \perp ΓΕ$.

Εφόσον $Ε$ είναι το συμμετρικό του σημείου $Α$ ως προς το $Β$, θα ισχύει $ΑΕ = 2ΑΒ$.

Άρα $ΑΕ = ΔΓ = 2ΑΒ$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $ΑΕΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες).

Άρα $ΓΕ = ΑΔ = ΒΓ$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $ΒΓΕ$ είναι ισοσκελές ($ΓΕ = ΒΓ$) οπότε το περίκεντρό του θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο της $ΒΕ$ που είναι η $ΓΚ$ (διότι $Γ, Κ$ ισαπέχουν από τα άκρα του $ΒΕ$).

Άρα $ΚΓ \perp ΒΕ \parallel ΓΔ \Rightarrow ΚΓ \perp ΓΔ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΒΓΕ$ έχουμε: $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 180° - 2\hat{x}$.

Η γωνία $Β\widehat{Κ}Γ = \hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $Β\hat{Ε}Γ = \hat{x}$ (στο περιγεγραμμένο κύκλο του ισοσκελούς τριγώνου $ΒΓΕ$), άρα $\hat{z} = 2\hat{x}$ και κατά συνέπεια $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 180° - \hat{z}$.

Η γωνία $Β\widehat{Κ}Γ = \hat{z}$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΒΚΓ$ και η μη κυρτή γωνία $Β\widehat{Μ}Γ = 2\hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη.

Αν θέσουμε $\hat{Γ}_3 = \hat{\omega}$, τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $ΜΒΓ$ έχουμε:

$2\hat{\omega} + \hat{y} = 180° \Leftrightarrow 2\hat{\omega} + 360° - 2\hat{z} = 180° \Leftrightarrow \hat{\omega} = \hat{z} - 90°$.

Άρα $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3 = 180° - \hat{z} + \hat{z} - 90° = 90°$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(a-1)(x^2+2x+2)^2=(a+1)(x^4+4),$$

για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a.

Λύση

Επειδή $x^4+4=(x^2)^2+2^2+4x^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(a-1)(x^2+2x+2)^2=(a+1)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(x^2+2x+2)=(a+1)(x^2-2x+2)$$

(αφού $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2+2(a-1)x+2(a-1)=(a+1)x^2-2(a+1)x+2(a+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4ax+4=0 \Leftrightarrow x^2-2ax+2=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4a^2-8=4(a^2-2)\geq 0 \Leftrightarrow |a|\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right).$$

Επομένως, αν $a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ η εξίσωση έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και συγκεκριμένα:

- Αν $a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις $x=a\pm\sqrt{a^2-2}$.
- Αν $a=\pm\sqrt{2}$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα στο $\mathbb{R}$, την $x=a=\pm\sqrt{2}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε

$$f(x+T)=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε $f(x+T)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε για $x=0$ προκύπτει ότι

$$f(T)=f(0)\Rightarrow \sigma\upsilon\nu T+\sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{3}\right)=3 \qquad (1)$$

Η σχέση (1) μπορεί να αληθεύει μόνον όταν είναι:

$$\sigma\upsilon\nu T=1,\ \sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{2}\right)=1,\ \sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{3}\right)=1 \Leftrightarrow T=2\kappa\pi,\ T\sqrt{2}=2\lambda\pi,\ T\sqrt{3}=2\mu\pi,\ \kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{Z}.$$

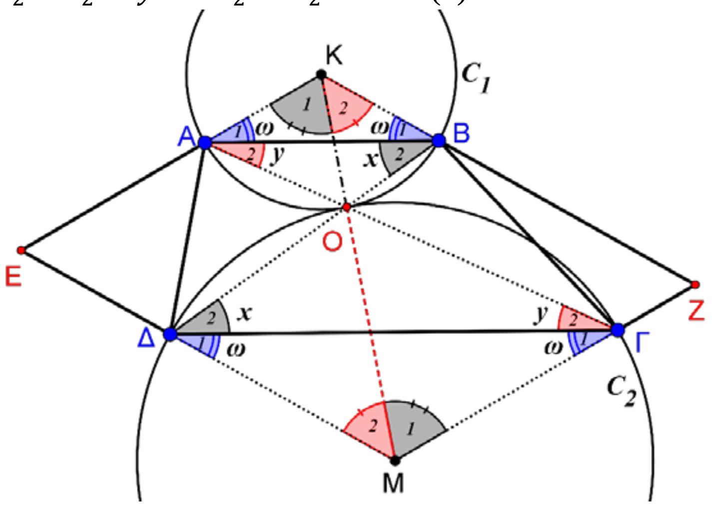
Από τις ισότητες $T=2\kappa\pi,\ T\sqrt{2}=2\lambda\pi$ λαμβάνουμε με διαίρεση κατά μέλη ότι $\dfrac{\lambda}{\kappa}=\sqrt{2}$, που είναι άτοπο γιατί ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, ενώ ο αριθμός $\dfrac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρητός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ /\!/ ΓΔ \; και \; ΑΒ < ΓΔ)$ και έστω O το σημείο τομής των διαγώνιων του $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Έστω ακόμη K το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου OAB και M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τριγώνου $ΟΔΓ$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών KA και $MΔ$ και Z είναι το σημείο τομής των KB και $MΓ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, O, M καθώς και το μέσο της EZ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Από την παραλληλία των βάσεων του τραπεζίου, προκύπτουν (ως εντός εναλλάξ) οι ισότητες γωνιών: $\hat{A}_2 = \hat{Γ}_2 = \hat{y}$ και $\hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{x}$ (1).



Σχήμα 5

Η γωνία $\hat{K}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $\hat{B}_2$ (στο κύκλο C_1) οπότε:

$$\hat{K}_1 = 2\hat{B}_2 = 2\hat{x}.$$

Η γωνία $\hat{M}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $\hat{Δ}_2$ (στο κύκλο C_2) οπότε:

$$\hat{M}_1 = 2\hat{Δ}_2 = 2\hat{x}.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε: $\hat{K}_1 = \hat{M}_1 = 2\hat{x}$ (2).

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι: $\hat{K}_2 = \hat{M}_2 = 2\hat{y}$ (3).

Από το ισοσκελές τρίγωνο KAB έχουμε:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180°.$$

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega} = 90° - \hat{x} - \hat{y}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $MΓΔ$ έχουμε:

$$\hat{K}_1 + \hat{K}_2 + \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180°.$$

Άρα $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1 = \hat{\omega} = 90° - \hat{x} - \hat{y}$.

Από το τρίγωνο AOK έχουμε: $A\hat{O}K = 180° - \hat{\omega} - \hat{y} - 2\hat{x}$.

Από το τρίγωνο $ΓOM$ έχουμε: $Γ\hat{O}M = 180° - \hat{\omega} - \hat{y} - 2\hat{x}$.

Από τις τελευταίες ισότητες έχουμε: $A\hat{O}K = Γ\hat{O}M$. Άρα τα σημεία O, K, M είναι συνευθειακά.

Από τις ισότητες των γωνιών $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega} = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$ και την παραλληλία $AB /\!/ ΓΔ$ συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $KEMZ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

Πρόβλημα 4

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p, q, r με $p > q > r$ είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$ μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο. Τότε γράφουμε:

$$\sqrt[3]{rp} = a, \sqrt[3]{2018pq} = a + kd, \sqrt[3]{2018qr} = a + md\ ,\ m, k \in Z$$

Αντικαθιστώντας το a παίρνουμε τις σχέσεις

$$\sqrt[3]{2018pq} = \sqrt[3]{rp} + kd \ \text{ και } \ \sqrt[3]{2018qr} = \sqrt[3]{rp} + md\ ,$$

οπότε απαλείφοντας το d παίρνουμε:

$$m\sqrt[3]{2018pq} - k\sqrt[3]{2018qr} = (m-k)\sqrt[3]{rp}\ . \qquad (1)$$

Υψώνοντας στον κύβο την (1) παίρνουμε:

$$2018m^3pq - 2018k^3qr + 3mk\sqrt[3]{2018^2q^2pr}(m\sqrt[3]{2018pq} - k\sqrt[3]{2018qr}) = (m-k)^3rp$$

Η τελευταία λόγω της (1) γράφεται:

$$2018m^3pq - 2018k^3qr + 3mk(m-k)\sqrt[3]{2018^2q^2p^2r^2} = (m-k)^3rp\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $(2018pqr)^2$ πρέπει να είναι τέλειος κύβος. Όμως στο $2018pqr = 2 \cdot 1009 \cdot pqr$ κάθε πρώτος μπορεί να εμφανιστεί σε δύναμη το πολύ 2, αφού $p > q > r$, άρα δεν είναι τέλειος κύβος.