Παρουσίαση

των

θεμάτων

του διαγωνισμού της Ε.Μ.Ε

ο «ΘΑΛΗΣ»

από Σχολικό Έτος 1998 έως 2005

για την

Α΄

Τάξη Λυκείου

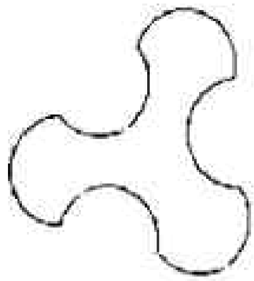
Θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου 1998-99

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$$

2. Μια περιοχή του επιπέδου περικλείεται από 6 ημικύκλια ακτίνας 1 cm όπως στο σχήμα. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής αυτής



3. Έστω ότι για θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)=0.$$

Να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

4. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί ν για τους οποίους ο αριθμός $2\nu + 1$ διαιρεί τον αριθμό $\nu^2 + \nu - 2$.

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 1998-99

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. $(x^2 + x)^2 + (x^2 + x) - 42 = 0$
$x^2 + x = 6$ ή -7. Άρα $x^2 + x - 6 = 0$
$x = 2, \quad -3$.

2. Εμβαδό κανονικού εξαγώνου πλευράς 2.

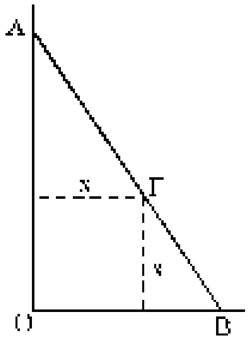
3. Μετά από πράξεις λαμβάνουμε: $\alpha(\beta - \gamma)^2 + \beta(\gamma - \alpha)^2 + \gamma(\alpha - \beta)^2 = 0$

4. $2\nu + 1 \mid \nu^2 + \nu - 2$. Άρα $2\nu + 1 \mid 4\nu^2 + 4\nu - 8 = (2\nu + 1)^2 - 9$. Άρα $2\nu + 1 \mid 9$ κλ.π.

Θέματα Θαλή Α’ Λυκείου 1999-00

1. Το άθροισμα δύο ακεραίων αριθμών είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρεθούν οι αριθμοί.

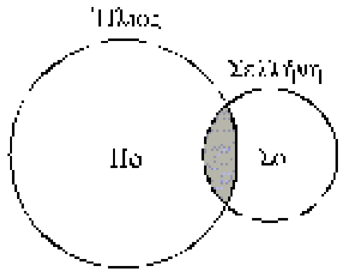
2. Μια σκάλα ακουμπά στο έδαφος και στον τοίχο. Το σημείο επαφής Α στον τοίχο βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Επιπλέον υπάρχει ένα σημείο της σκάλας που απέχει ίση απόσταση x από τον τοίχο και το έδαφος. Να βρείτε το μήκος της σκάλας συναρτήσει των h και x.



3. Στη πρόσφατη έκλειψη Ηλίου στη χώρα μας ο δίσκος της Σελήνης κάλυπτε το δίσκο του Ηλίου έτσι ώστε η καλυπτόμενη επιφάνεια να μεγαλώνει σιγά - σιγά.

Το σχήμα μας δείχνει μία φάση της κάλυψης αυτής.

Να αποδείξετε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή του φαινομένου, η διαφορά μεταξύ των μη επικαλυπτομένων επιφανειών H_o - Σ_o παρέμενε σταθερή.



4. Αν α περιττός ακέραιος, να δειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha^4 + 6\alpha^2 - 7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

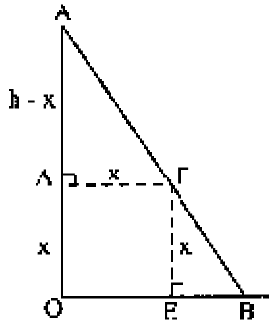
1. Έστω x, y οι αριθμοί με x>y. Τότε είναι x+y=26 και x=4y+1. Άρα είναι : x=21, y=5.

2. Από τα όμοια τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΕΒ έχουμε $\frac{\Gamma B}{A\Gamma}=\frac{x}{h-x}$ ή $\Gamma B=\left(\frac{x}{h-x}\right)A\Gamma$. Από τρίγ. ΑΔΓ είναι (Πυθαγόρειο Θ.): $A\Gamma=\sqrt{x^2+(h-x)^2}$.

Άρα :

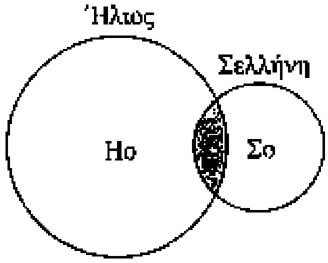
$$AB=A\Gamma+\Gamma B=A\Gamma+\left(\frac{x}{h-x}\right)A\Gamma=\left(1+\frac{x}{h-x}\right)A\Gamma$$

και $AB=\frac{h}{h-x}\cdot\sqrt{x^2+(h-x)^2}$.



3. Αν με Ε συμβολίσουμε το κοινό επικαλυπτόμενο τμήμα των δύο επιφανειών και Η, Σ τα εμβαδά των κυκλικών δίσκων Ηλίου και Σελήνης, αντίστοιχα, τότε :

H_0 = Η - Ε και Σ_0 = Σ - Ε και
$H_0 - \Sigma_0$ = (Η - Ε) - (Σ - Ε)
= Η – Ε – Σ + Ε
= Η – Σ ,
δηλαδή σταθερό.



4. Κατ' αρχήν έχουμε : $\alpha^4+6\alpha^2-7=(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+7)$. Έστω $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in Z$. Τότε $\alpha-1=2\kappa$, $\alpha+1=2(\kappa+1)$ και
$\alpha^2+7=(2\kappa+1)^2+7=4\kappa^2+4\kappa+8=4\cdot[\kappa(\kappa+1)+2]$. Άρα είναι
$\alpha^4+6\alpha^2-7=16\kappa(\kappa+1)\cdot[\kappa(\kappa+1)+2]$. Όμως είναι $\kappa(\kappa+1)=2\rho$, $\rho\in Z$,
οπότε $\alpha^4+6\alpha^2-7=16\cdot 2\rho\cdot(2\rho+2)=64\rho(\rho+1)$, και αφού $\rho\cdot(\rho+1)=2\lambda$,
$\lambda\in Z$, θα είναι τελικά : $\alpha^4+6\alpha^2-7=64\cdot 2\lambda=128\cdot\lambda$, $\lambda\in Z$, δηλαδή ο αριθμός $\alpha^4+6\alpha^2-7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.

Θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου 2000-01

1. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού. Να βρεθεί ο αριθμός.

2. (α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι 360°.

   (β) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οι εξωτερικές γωνίες $\hat{A}_{εξ}$, $\hat{B}_{εξ}$, $\hat{Γ}_{εξ}$, $\hat{Δ}_{εξ}$ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 8, 10 και 12, αντιστοίχως.
   Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου.

3. Σε μία τάξη Λυκείου διοργανώθηκε πρωτάθλημα σκακιού. Την πρώτη ημέρα έγιναν μόνο κάποιοι αγώνες στους οποίους οι δύο αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι.
   Στους αγώνες αυτούς της πρώτης ημέρας πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των κοριτσιών της τάξης. Αν η τάξη έχει συνολικά 34 παιδιά να βρείτε:
   (i) πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη,
   (ii) πόσα παιδιά δεν πήραν μέρος την πρώτη μέρα στους αγώνες.

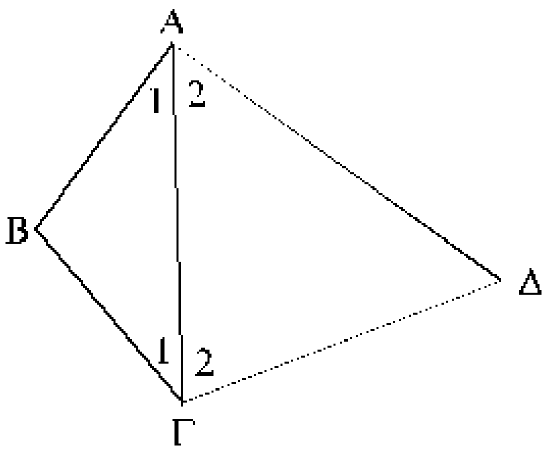
4. Οι δύο διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι οι θετικοί ακέραιοι x και y. Αν αυξήσουμε τη μία διάσταση κατά 1 και την άλλη διάσταση κατά 2, τότε το ορθογώνιο που προκύπτει έχει εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου. Να βρεθούν οι διαστάσεις x, y.

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2000-01

1. Αν x είναι ο αριθμός, τότε $3x + 18 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ή $x = -3$.

2. (α) Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ έχουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ και

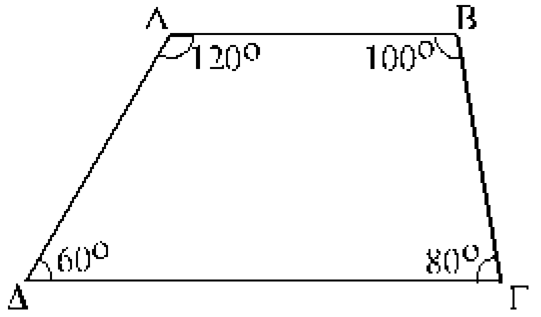
$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} + \hat{Δ} &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}\\ &= (\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{Γ}_1) + (\hat{A}_2 + \hat{Γ}_2 + \hat{Δ})\\ &= 180° + 180° = 360°.\end{aligned}$$



(β) Έχουμε: $\frac{\hat{A}_{εξ}}{6} = \frac{\hat{B}_{εξ}}{8} = \frac{\hat{Γ}_{εξ}}{10} = \frac{\hat{Δ}_{εξ}}{12} = λ \Leftrightarrow$

$\hat{A}_{εξ} = 6λ, \hat{B}_{εξ} = 8λ, \hat{A}_{Γξ} = 10λ, \hat{Δ}_{εξ} = 12λ \Leftrightarrow$

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2000-01



$180° - \widehat{A} = 6\lambda$, $180° - \widehat{B} = 8\lambda$, $180° - \widehat{\Gamma} = 10\lambda$, $180° - \widehat{\Delta} = 12\lambda \Leftrightarrow$

$$4 \cdot 180° - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta}) = 6\lambda + 8\lambda + 10\lambda + 12\lambda \Leftrightarrow$$

$$720° - 360° = 36\lambda \Leftrightarrow \qquad 36\lambda = 360° \Leftrightarrow \lambda = 10.$$

Άρα είναι: $180° - \widehat{A} = 60°$, $180° - \widehat{B} = 80°$, $180° - \widehat{\Gamma} = 100°$, $180° - \widehat{\Delta} = 120°$

$$\Leftrightarrow \widehat{A} = 120°, \widehat{B} = 100°, \widehat{\Gamma} = 80°, \widehat{\Delta} = 60°$$

Επειδή $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180°$ θα είναι ΑΒ ∥ ΔΓ και αφού $\widehat{A} + \widehat{B} \neq 180°$, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

3. Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών και Κ ο αριθμός των κοριτσιών, τότε την πρώτη μέρα πήραν μέρος $\frac{3A}{4}$ αγόρια και $\frac{2K}{3}$ κορίτσια. Επειδή ένα αγόρι έπαιξε την παρτίδα με ένα κορίτσι θα έχουμε ότι $\frac{3A}{4} = \frac{2K}{3} \Leftrightarrow 9A = 8K \Leftrightarrow A = \frac{8K}{9}$.

   Όμως έχουμε $A + K = 34 \Leftrightarrow \frac{8K}{9} + K = 34 \Leftrightarrow \frac{17K}{9} = 34 \Leftrightarrow K = 18$,

   οπότε $A = \frac{8}{9} \cdot 18 = 16$.

   Επομένως δεν έπαιξαν την πρώτη ημέρα $A - \frac{3A}{4} = \frac{A}{4} = 4$ αγόρια και $K - \frac{2K}{3} = \frac{K}{3} = 6$ κορίτσια.

---

4. Σύμφωνα με την άσκηση θα έχουμε

$$(x + 1)(y + 2) = 2xy$$
$$xy + 2x + y + 2 = 2xy$$
$$-xy + 2x + y + 2 = 0$$
$$(2 - y)x + y + 2 = 0$$
$$(2 - y)x - (2 - y) = -4$$
$$(2 - y)(x - 1) = -4$$
$$(x - 1)(y - 2) = 4$$

Επειδή οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι θα έχουμε:

($x - 1 = 1$ και $y - 2 = 4$) ή ($x - 1 = 2$ και $y - 2 = 2$) ή ($x - 1 = 4$ και $y - 2 = 1$)

δηλαδή είναι: $x = 2, y = 6$ ή $x = 3, y = 4$ ή $x = 5, y = 3$.

Θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου 2001-02

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z ισχύει ότι $xyz=1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=\frac{1}{y+1-\frac{y}{x+1}}+\frac{1}{z+1-\frac{z}{y+1}}+\frac{1}{x+1-\frac{x}{z+1}}.$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$3(1+a^2+a^4)x=(1+a+a^2)^2x+a^5+a^4+a^3-a^2-a-1$$

ως προς x, θεωρώντας το a ως παράμετρο.

3. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και σημείο Β στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο μέρος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ.

Αν οι ΑΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ζ, να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}\Delta$.

4. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό Μ, ο οποίος έχει την ιδιότητα: για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha+\beta=1$ ισχύει ότι:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\geq M$$

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2001-02

1. Από την συνθήκη xyz=1 προκύπτει ότι $z=\frac{1}{xy}$, οπότε με πράξεις και αντικατάσταση λαμβάνουμε:

$$K=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{\frac{1}{x}+y+1}+\frac{\frac{1}{xy}+1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}+1}$$

$$K=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{xy+x}{xy+x+1}+\frac{1+xy}{xy+x+1}$$

$$K=\frac{2xy+2x+2}{xy+x+1}=\frac{2(xy+x+1)}{xy+x+1}=2.$$

2. Η εξίσωση γίνεται:

$$[3(1+\alpha^2+\alpha^4)-(1+\alpha+\alpha^2)^2]x=\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1$$

$$\Leftrightarrow (3+3\alpha^2+3\alpha^4-1-\alpha^2-\alpha^4-2\alpha-2\alpha^2-2\alpha^3)x=\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha^4-2\alpha^3-2\alpha+2)x=\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1$$

$$\Leftrightarrow [2\alpha^3(\alpha-1)-2(\alpha-1)]x=\alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)-(\alpha^2+\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1)(\alpha^3-1)x=(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^3-1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1)^2(\alpha^2+\alpha+1)x=(\alpha^2+\alpha+1)^2(\alpha-1) \qquad (1)$$

Έχουμε όμως ότι

$$\alpha^2+\alpha+1=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2001-02

(i) Αν $\alpha - 1 \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq 1$, τότε οι εξίσωση έχει τη λύση

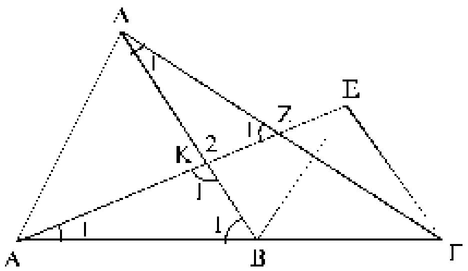
$$x = \frac{(\alpha^2+\alpha+1)^2(\alpha-1)}{2(\alpha-1)^2(\alpha^2+\alpha+1)} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{2(\alpha-1)}$$

(ii) Αν α-1=0, δηλαδή α=1, τότε (1) $\Leftrightarrow 0x = 0$ και αληθεύει για κάθε $x \in R$

3. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ έχουν

- ΑΒ=ΒΔ
- ΒΕ=ΒΓ
- $A\hat{B}E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \Gamma\hat{B}\Delta$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$.



Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΔΚΖ έχουν δύο γωνίες τους ίσες , μια προς μία, $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ (ως κατά κορυφήν). Άρα θα έχουν και $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1 = 60^\circ$, δηλαδή $A\hat{Z}\Delta = 60^\circ$.

---

4. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right) > 1$, οπότε θα θεωρήσουμε ότι είναι Μ>1.

Έχουμε $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \geq M \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta} \geq M$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta} \geq M$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta} \geq M$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{2}{\alpha\beta} \geq M$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha\beta} \geq M-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{2} \leq \frac{1}{M-1},$$

(αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι Μ>1)

$$\Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{2}{M-1} \quad (1)$$

Άρα ζητάμε το μεγαλύτερο Μ που ικανοποιεί την (1).

Έχουμε $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$, που ισχύει, οπότε για α+β=1 λαμβάνουμε $1 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ και η ισότητα ισχύει για $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Άρα ο μικρότερος αριθμός $\frac{2}{M-1}$ για τον οποίο αληθεύει η (1) είναι $\frac{1}{4}$, οπότε ο μεγαλύτερος αριθμός Μ για τον οποίο ικανοποιείται η (1) προκύπτει από την εξίσωση

$$\frac{2}{M-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow M = 9.$$

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2001-02

2ος τρόπος
Α΄ Λυκείου 4ο Θέμα

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\left(1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)$$

$$=\left(1+1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot\left(1+1+\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$=4+2\frac{\alpha}{\beta}+2\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=4+1+2\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\geq 5+2\cdot 2=9$$

και επειδή για $\alpha=\beta=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=9$ το Μ είναι το 9.

Θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου 2002-03

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς α, με α>1 . Το τετράγωνο που έχει πλευρά κατά 1 μικρότερη του α, έχει περίμετρο ίση αριθμητικά προς το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου. Να βρεθεί η πλευρά α.

ΘΕΜΑ 2ο

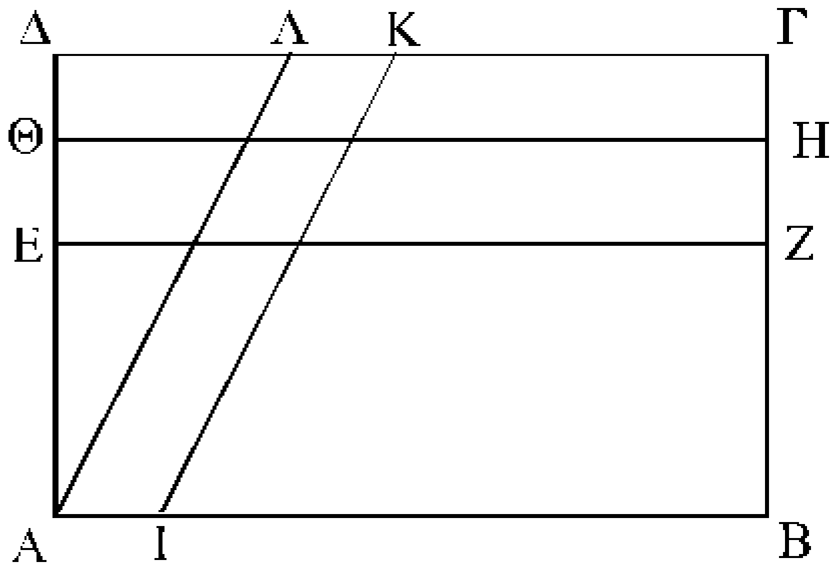
Οι αριθμοί x, y, z, w έχουν την ιδιότητα :

Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς και από το άθροισμά που θα προκύψει αφαιρέσουμε τον αριθμό 5 προκύπτει πάντοτε ο αριθμός 2002 .

Να υπολογίσετε το άθροισμα $x+y+z+w$.

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ = α και ΒΓ = β. Από το οικόπεδο θα κοπούν δύο δρόμοι ΕΖΗΘ και ΑΙΚΛ. Ο δρόμος ΕΖΗΘ σχήματος ορθογωνίου έχει πλάτος ΖΗ=ψ, ενώ ο δρόμος ΑΙΚΛ σχήματος παραλληλογράμμου έχει πλευρά ΑΙ=χ.



(i) Να εκφράσετε το εμβαδόν του οικοπέδου που απομένει μετά την αποκοπή των δύο δρόμων ως συνάρτηση των α, β, χ και ψ.

(ii) Να εκφράσετε το πλάτος d του δρόμου ΑΙΚΛ ως συνάρτηση του χ, αν είναι γνωστό ότι $\Delta\hat{A}\Lambda = 30^o$.

ΘΕΜΑ 4ο

Μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό 2002 ως άθροισμα ενός τριψηφίου αριθμού και του κύβου του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού αυτού;

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2002-03

1. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

$$\alpha^2 = 4(\alpha - 1) \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 .$$

2. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z - 5 = 2002 \\ y + z + w - 5 = 2002 \\ z + w + x - 5 = 2002 \\ w + x + y - 5 = 2002 \end{aligned}\right\},$$

από τις οποίες με πρόθεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &3(x + y + z + w) - 20 = 8008 \Leftrightarrow \\ &3(x + y + z + w) = 8028 \Leftrightarrow \\ &x + y + z + w = 2676 \end{aligned}$$

3. i) $E_0 = \alpha\beta - \beta\chi - \alpha\psi + \chi\psi = (\alpha - \chi)(\beta - \psi)$ (γιατί το κοινό τμήμα των δύο δρόμων αφαιρείται δύο φορές).

ii) $d = A I \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \dfrac{\chi\sqrt{3}}{2}$.

4. Έστω $2002 = \overline{\alpha\beta\gamma} + (\alpha + \beta + \gamma)^3$.

Τότε $2002 - \overline{\alpha\beta\gamma} = (\alpha + \beta + \gamma)^3$. Επειδή $100 \le \overline{\alpha\beta\gamma} \le 1000$ θα είναι $1002 < (\alpha + \beta + \gamma)^3 \le 1902$.

Όμως οι μοναδικοί κύβοι ακεραίων μεταξύ του 1002 και του 1902 είναι οι αριθμοί 11 και 12. Τότε θα έχουμε:

$\overline{\alpha\beta\gamma} + 11^3 = 2002$ ή $\overline{\alpha\beta\gamma} + 12^3 = 2002 \Leftrightarrow \overline{\alpha\beta\gamma} = 671$ ή $\overline{\alpha\beta\gamma} = 274$,

από τους οποίους κανένας δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος. Επομένως δεν ισχύει το ζητούμενο.

Θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου 2003-04

1. Το τετράγωνο ενός αριθμού ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 72.
Επιπλέον, αν από το 60 αφαιρέσουμε το διπλάσιο του αριθμού λαμβάνουμε αριθμό μικρότερο του 52. Να βρεθεί ο αριθμός.

2. Αν x, y, a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$x \neq y, x \neq 2y, y \neq 2x, a \neq \pm 3b \ \kappa\alpha\iota\ \frac{2x-y}{a+3b} = \frac{2y-x}{a-3b} = \lambda,$$

να αποδείξετε ότι :

(ι) $x + y = 2\lambda a$ και $x - y = 2\lambda b$

(ιι) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \geq 1.$

3. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διαγώνιες τέμνονται στο Ε. Αν είναι (ΑΒΕ)=72 m^2 και (ΓΔΕ)=50 m^2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

4. Να βρεθούν οι ακέραιοι α, β για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha = 2\beta^2 + 4\beta + 3$$

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2003-04

Θέμα 1.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, αν x είναι ο ζητούμενος ο αριθμός, θα έχουμε:

$$x^2 = x + 72 \ (1)$$
$$60 - 2x < 52 \ (2)$$

Από την (1) έχουμε: $x^2 - x - 72 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 1 + 288 = 289 = 17^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x = \frac{1 \pm 17}{2} = \begin{cases} 9 \\ -8 \end{cases}$$

Όμως από την (2) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 60 - 2x < 52 &\Leftrightarrow -2x < 52 - 60 \\ &\Leftrightarrow -2x < -8 \\ &\Leftrightarrow 2x > 8 \\ &\Leftrightarrow x > 4 \end{aligned}$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9.

Θέμα 2.

i) Έχουμε $\dfrac{2x-y}{\alpha+3b} = \dfrac{2y-x}{\alpha-3b} = \lambda,$

Τότε

$$2x - y = \lambda\alpha + 3\lambda b \quad (1)$$
$$-x + 2y = \lambda\alpha - 3\lambda b \quad (2)$$

από τις οποίες με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2\lambda\alpha \\ 3x - 3y &= 6\lambda b \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y &= 2\lambda\alpha \quad (3) \\ x - y &= 2\lambda b \quad (4) \end{aligned}$$

---

ii) Από τις (3) και (4) με πρόθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{l}2x = 2\lambda\alpha + 2\lambda b \\ 2y = 2\lambda\alpha - 2\lambda b\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x = \lambda\alpha + \lambda b \\ y = \lambda\alpha - \lambda b\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x = \lambda(\alpha + b) \\ y = \lambda(\alpha - b)\end{array}\right\},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\lambda^2(\alpha+b)^2+\lambda^2(\alpha-b)^2}{\lambda^2(\alpha+b)^2-\lambda^2(\alpha-b)^2} \geq \frac{\lambda^2\cdot 2(\alpha^2+b^2)}{\lambda^2\cdot 4\alpha b} = \frac{\alpha^2+b^2}{2\alpha b},$$

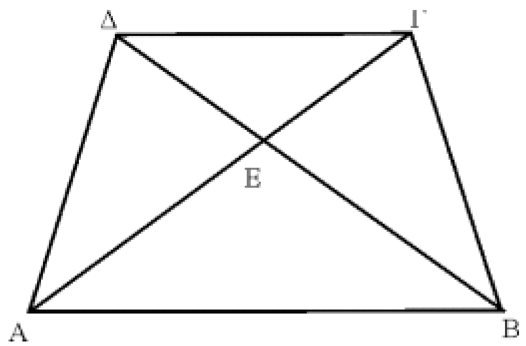
οπότε αρκεί να είναι

$$\frac{\alpha^2+b^2}{2\alpha b} \geq 1 \overset{\alpha,b>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+b^2-2\alpha b \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-b)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Θέμα 3.

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$, οπότε θα είναι:

$$\frac{(\mathrm{AEB})}{(\Delta\mathrm{E\Gamma})} = \left(\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}\right)^2 = \frac{72}{50} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}} = \sqrt{\frac{72}{50}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}.$$



Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΔΕΓ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Δ, οπότε

$$\frac{(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\Delta\mathrm{E\Gamma})} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{6}{5} \Rightarrow (\mathrm{AE}\Delta) = \frac{6}{5}(\Delta\mathrm{E\Gamma}) = \frac{6}{5}\cdot 50\mathrm{m}^2 = 60\mathrm{m}^2.$$

Ομοίως λαμβάνουμε $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E}\Delta} = \frac{6}{5}$ και $(\mathrm{BE\Gamma}) = 60\mathrm{m}^2$, οπότε

(ΑΒΓΔ)=(ΑΕΒ)+(ΒΕΓ)+(ΓΕΔ)+(ΔΕΑ)=72+60+50+60=242m^2.

Θέμα 4.

Έχουμε

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha = 2\beta^2 + 4\beta + 3 \Leftrightarrow \alpha(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta^2 + 2\beta) + 3$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta^2 + 2\beta + 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2)(\beta + 1)^2 = 1$$

$$\overset{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \alpha - 2 = 1 \quad \text{και} \quad (\beta+1)^2 = 1 \quad (\text{αφού } (\beta+1)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2 = 1 \quad \text{και} \quad \beta + 1 = 1) \quad \text{ή} \quad (\alpha - 2 = 1 \quad \text{και} \quad \beta + 1 = -1)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \beta = 0) \quad \text{ή} \quad (\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \beta = -2)$$

Θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου 2004-05

1. Το τετράγωνο ενός αριθμού x ισούται με το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 8. Επιπλέον το διπλάσιο του αριθμού είναι μεγαλύτερο του -2. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Μονάδες 5

2. Αν το τετράγωνο του αθροίσματος των πραγματικών αριθμών x, y και z ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων τους και επιπλέον ισχύει $x + 2y + 3z = 60$, να βρείτε τους αριθμούς x, y και z.

Μονάδες 5

3. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $ΑΔ = α$, $ΒΓ = 2α$ και $ΓΔ = \frac{3α}{2}$, του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 1

(β) Να αποδείξετε ότι η ΔΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΒΔΕ}$.

Μονάδες 2

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ και το λόγο $\frac{Ε(ΕΒΓ)}{Ε(ΑΒΓΔ)}$.

Μονάδες 2

4. Οι θετικοί ακέραιοι x, y με $x > y$ είναι τέτοιοι ώστε

$$x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 = 49(x - y).$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y.

Μονάδες 5

<u>Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2004-05</u>

1. Σύμφωνα με τα δεδομένα θα έχουμε

$$x^2 = 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x = 4$$

ή $x = -2$.

Επειδή πρέπει $2x > -2 \Leftrightarrow x > -1$, θα είναι $x = 4$.

2. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$$(x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

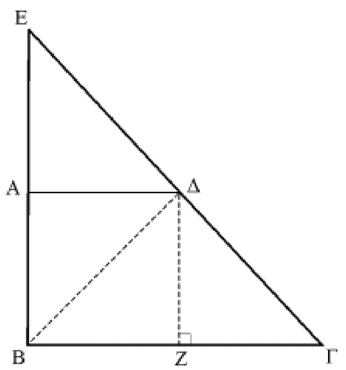
$\widehat{ΑΔΕ} = \widehat{ΒΓΔ}$ Έτσι από την ισότητα $x + 2y + 3z = 60$ προκύπτει ότι $x = y = z = 10$.

3. **(α)** Αν είναι $ΔΖ \perp ΒΓ$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΒΖ = α, ΖΓ = ΒΓ - ΒΖ = α$. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΔ και ΔΖΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν ΒΔ = ΔΓ και το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

(β) Επειδή $ΑΔ \parallel ΒΓ$ θα έχουμε

$$\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΔΒΓ} \text{ και . (1)}$$

Όμως από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΓ είναι $\widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΒΓΔ}$, οπότε από τις (1) προκύπτει ότι $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΔΕ}$, δηλαδή η ΔΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΔΕ.



(γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΖΓ λαμβάνουμε

$$ΔΖ^2 = \left(\frac{3α}{2}\right)^2 - α^2 = \frac{5α^2}{4} \Leftrightarrow ΔΖ = \frac{α\sqrt{5}}{2} \text{ και}$$

$$Ε(ΑΒΓΔ) = \left(\frac{α + 2α}{2}\right) \cdot \frac{α\sqrt{5}}{2} = \frac{3α^2\sqrt{5}}{4}$$

Επιπλέον έχουμε ότι τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΕΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$\frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{α}{2α} = \frac{1}{2}$, οπότε θα είναι $\frac{Ε(ΕΑΔ)}{Ε(ΕΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Επομένως

$$\frac{Ε(ΕΒΓ)}{Ε(ΑΒΓΔ)} = \frac{Ε(ΕΒΓ)}{Ε(ΕΒΓ) - Ε(ΕΑΔ)} = \frac{1}{1 - \frac{Ε(ΕΑΔ)}{Ε(ΕΒΓ)}} = \frac{4}{3}$$

4. Η δεδομένη ισότητα γράφεται

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) + xy(x-y) = 49(x-y) \Leftrightarrow$$

$$(x-y)(x+y)^2 = 7^2(x-y)$$

Επειδή $x > y$ θα είναι $x - y > 0$, οπότε προκύπτει $(x+y)^2 = 7^2 \Leftrightarrow x + y = 7$, αφού οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι.

Επομένως έχουμε $(x,y) = (6,1)$ ή $(x,y) = (5,2)$ ή $(x,y) = (4,3)$

Θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου 2005-06

1. Ν' αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$, είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

2. Ν' απλοποιηθεί η παράσταση

$$\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}\ .$$

3. Να αναλυθεί το πολυώνυμο

$$x^6 - 2x^5 + x^2 - x - 2$$

σε γινόμενο τριών πολυωνύμων θετικού βαθμού.

4. Ν' αποδειχθεί ότι αν η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα, τότε το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

Υποδείξεις Θαλή Α΄ Λυκείου 2005-06

1. $a(a+2)^3 - (a+1)(a-1)^3 = (2a+1)^3.$

2. Χρησιμοποιούμε τη «συμπλήρωση τετραγώνου», π.χ.

$$3+2\sqrt{2} = 1^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1+\sqrt{2})^2$$

ή τη «μετατροπή διπλών ριζικών σε απλά»

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{(A+C)/2} \pm \sqrt{(A-C)/2}$$

όπου $C^2 = A^2 - B$. Άρα η παράσταση ισούται με

$$\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} =$$
$$\sqrt{13 + 30(1+\sqrt{2})} = \sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = 5 + 3\sqrt{2}.$$

3. Έχουμε

$$x^6 - 2x^5 + x^2 - x - 2 = \left(x-2\right)(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

4. Έστω ΑΒΓΔ το τετράπλευρο, Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ, Ν το μέσο της πλευράς ΓΔ και η ευθεία ΜΝ διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισεμβαδικά τμήματα. Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΝ και ΓΜΝ είναι ισοδύναμα, έπεται ότι και τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΓΒΜ είναι ισοδύναμα και τα ύψη τους είναι ίσα επειδή και οι βάσεις τους είναι ίσες. Άρα η ΑΒ είναι παράλληλη προς την ΓΔ.
