



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτευεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. και δεν προβλέπεται Αναβαθμολόγηση (διότι γίνεται εσωτερικά).
9. **Ο «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ»** θα διενεργηθεί στις **20 Ιανουαρίου 2007** και η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών **«ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»** θα γίνει στις **24 Φεβρουαρίου 2007** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στη **24^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ρόδος, 26 Απριλίου – 2 Μαΐου 2007)**, στην **11^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Βουλγαρία, Ιούνιος 2007)** και στην **48η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Βιετνάμ, Ιούλιος 2007)**.
10. Με εισήγηση της Επιτροπής Διαγωνισμών το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. **αποφάσισε να σταλούν μέσω των Παραρτημάτων, σε κάθε συνάδελφο, ο οποίος συμμετέχει στη διαδικασία των διαγωνισμών, αντίτυπα από εκδόσεις της Εταιρείας.** Για το σκοπό αυτό, παρακαλούμε τους προέδρους των ΤΝΕ να μας αποστείλουν κατάσταση με τα πλήρη στοιχεία των εμπλεκομένων συναδέλφων στη διαδικασία των διαγωνισμών.
11. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
12. **Παρακαλούμαι τον Πρόεδρο της ΤΝΕ μαζί με τα γραπτά να μας στείλει το ονοματεπώνυμο και την ταχ. Δ/σή του καθώς και τα ονοματεπώνυμα όλων των επιτηρητών για να τους σταλεί ονομαστική ευχαριστήρια επιστολή από το Δ.Σ. της ΕΜΕ.**

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Θεόδωρος Εξαρχάκος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

Αθήνα, 9 Δεκεμβρίου 2006

Αγαπητοί μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ) “ΘΑΛΗΣ”. Σήμερα δεν δίνετε τις συνηθισμένες εξετάσεις. Συμμετέχετε σε έναν αγώνα του πνεύματος. Και μόνο η απόφασή σας για συμμετοχή είναι μια επιτυχία. Με την ευκαιρία αυτής μας της επικοινωνίας θα θέλαμε να σας πληροφορήσουμε για τα εξής :

Στα περιοδικά της ΕΜΕ **Ευκλείδης Α΄** και **Ευκλείδης Β΄** δημοσιεύονται εκτός των άλλων θεμάτων ανά τάξη και θέματα με τις λύσεις τους από Διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Επίσης έχουν εκδοθεί βιβλία της ΕΜΕ με τα θέματα των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων, Βαλκανιάδων, Θεωρίας αριθμών και είναι υπό έκδοση βιβλίο με τα θέματα των Ελληνικών Διαγωνισμών.

Στον κόμβο της ΕΜΕ στο διαδίκτυο στη διεύθυνση www.hms.gr, υπάρχουν θέματα με τις λύσεις τους από παλαιότερους Εθνικούς και Διεθνείς διαγωνισμούς. Ακόμα σύντομα θα τοποθετηθούν και σημειώσεις σχετικές με απαραίτητες γνώσεις μαθηματικών θεωρίας και ασκήσεων επιπέδου διεθνών Διαγωνισμών

Για τις εορτές των Χριστουγέννων και το νέο έτος το Δ.Σ. της ΕΜΕ σας εύχεται ολόψυχα χρόνια πολλά, προσωπική και οικογενειακή ευτυχία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ.
ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Θεόδωρος Εξαρχάκος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β΄ τάξη Γυμνασίου

1. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \left\{ 111 - \left[264 - \left(15 + \frac{54}{6} \right) \cdot |-5| \right] : 12 \right\} : 11 + 1$$

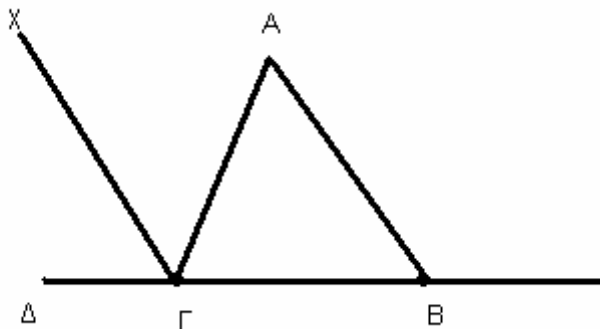
2. Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

3. Το 6% του αριθμού $\alpha \neq 0$ είναι ίσο με το 4% του αριθμού β . Να βρείτε την τιμή του κλάσματος.

$$K = \frac{9\alpha - 3\beta}{6\alpha - \beta}$$

4. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = B\Gamma$ και η διχοτόμος

$\Gamma\chi$ της γωνίας $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλη στην AB . Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



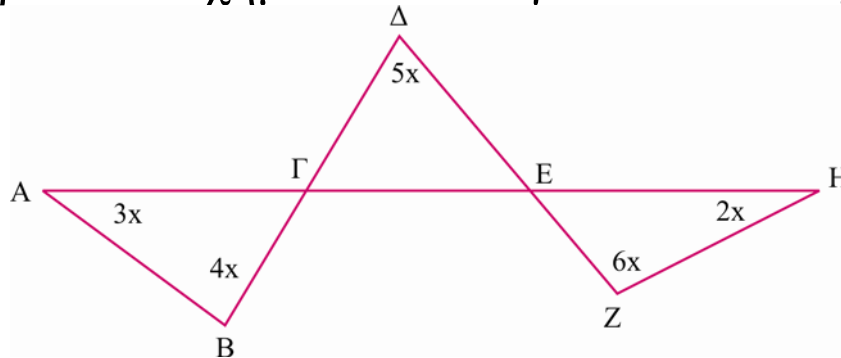
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ' τάξη Γυμνασίου

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



2. Αν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και $\alpha\beta\gamma=10$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

3. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $27p + 1$ είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2}a\beta^{-1} + \frac{10}{3}a^{-1}\beta = 3.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Α΄ τάξη Λυκείου

1. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090€. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x + 3) = \lambda^3 + 2\lambda x - 2$ για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ .

3. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > \hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{A} , \hat{B} τέμνονται στο Ι. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ – ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : ΙΔ = ΙΑ.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β' τάξη Λυκείου

1. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^2 - (2006\kappa + 1)x + 2007 = 0$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$, έχει δύο ακέραιες ρίζες.

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4, ΒΓ = 2 και σημείο Μ στο εσωτερικό του με ΜΓ = 1 και ΜΒ = $\sqrt{3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

3. Έστω $K = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008}$. Να αποδείξετε ότι ο 30 διαιρεί τον κ.

4. α) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{19}$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{-1}x + x^{-1} = \frac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ' τάξη Λυκείου

1. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x+y)) = x - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) + f(-x)$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$3^{x+1} - x \cdot 3^x - 4x - 1 = 0.$$

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 και $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma \nu^2 \theta} + \frac{|z_2|^2}{\eta \mu^2 \theta} \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ.

Αν $B\hat{K}\Gamma = B\hat{\Lambda}\Gamma = B\hat{M}\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα γινόμενα $KB \cdot K\Gamma$, $\Lambda B \cdot \Lambda\Gamma$ και $MB \cdot M\Gamma$ είναι άνισα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Λύσεις Β΄ Γυμνασίου

1. Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$A = (111 - 144 : 12) : 11 + 1 = (111 - 12) : 11 + 1 = 99 : 11 + 1 = 9 + 1 = 10$$

2. Επειδή ο 100 λήγει σε 0 και τα πολλαπλάσια του 10 λήγουν σε 0, θα πρέπει και ο αριθμός που εκφράζει τα νομίσματα των 2€ να λήγει σε 0. Άρα τα νομίσματα των 2€ θα είναι 5 ή 10 ή 15. Όμως παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι 5 ή 15. Άρα θα είναι 10 .
Πράγματι

$$10 \cdot 2 + 8 \cdot 10 = 100.$$

3. Έχουμε:

$$\frac{6}{100} \alpha = \frac{4}{100} \beta \text{ οπότε } \alpha = \frac{2}{3} \beta . \text{ Έτσι έχουμε}$$

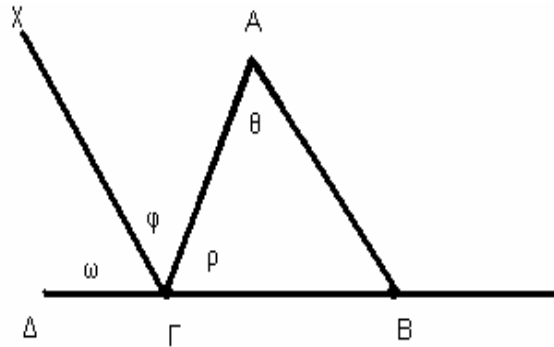
$$\kappa = \frac{9 \cdot \frac{2}{3} \beta - 3\beta}{6 \cdot \frac{2}{3} \beta - \beta} = \frac{6\beta - 3\beta}{4\beta - \beta} = \frac{3\beta}{3\beta} = 1$$

4. Αφού η Γx είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\Gamma\Delta}$ θα ισχύει $\omega = \phi$. Επειδή $\Gamma x \parallel AB$ θα ισχύει $\phi = \theta$ και αφού

$AB=BΓ$ θα είναι $\theta = \rho$. Άρα $\omega = \phi = \theta = \rho$, και

$$\omega + \phi + \rho = 180^\circ, \text{ οπότε } \omega = \phi = \rho = 60^\circ$$

Άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.



Λύσεις Γ' Γυμνασίου

1. Έχουμε

$$\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{E} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 180^\circ - 3x - 4x = 180^\circ - 7x$$

$$\hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{H}\hat{E}\hat{Z} = 180^\circ - 2x - 6x = 180^\circ - 8x$$

Έτσι, έχουμε, στο τρίγωνο $\Gamma\Delta E$:

$$\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{E} + \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 180^\circ \text{ οπότε}$$

$$180^\circ - 7x + 180^\circ - 8x + 5x = 180^\circ \Leftrightarrow 10x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 18^\circ.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad A &= \alpha^2 \cdot (-2\beta)^2 \cdot \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \alpha^2 \cdot 4\beta^2 \cdot \frac{\gamma^2}{4} = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = \\ &= (\alpha\beta\gamma)^2 = 10^2 = 100. \end{aligned}$$

3. Έστω $A=27p+1$. Για $p=2$ έχουμε $A=27 \cdot 2+1=55=5 \cdot 11$, ενώ για $p \neq 2$ ο $27p$ είναι περιττός οπότε ο A είναι άρτιος.

4. Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί τότε

$$\left(\frac{3}{2} a \beta^{-1} + \frac{10}{3} a^{-1} \beta \right)^2 = 9, \text{ οπότε}$$

$$\frac{9}{4} a^2 \beta^{-2} + \frac{100}{9} a^{-2} \beta^2 + 10 = 9 \text{ οπότε}$$

$$\frac{9}{4} a^2 \beta^{-2} + \frac{100}{9} a^{-2} \beta^2 = 9 - 10 = -1, \text{ που δεν ισχύει.}$$

ΛΥΣΕΙΣ Α' τάξη Λυκείου

1. Έστω ότι $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 1090 \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$$\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon. \text{ Επειδή } \alpha \geq 20 \text{ και } \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$$

φυσικοί έχουμε:

$$\beta > \alpha \geq 20 \Rightarrow \beta > 20 \Rightarrow \beta \geq 21$$

$$\gamma > \beta \geq 21 \Rightarrow \gamma > 21 \Rightarrow \gamma \geq 22$$

$$\delta > \gamma \geq 22 \Rightarrow \delta > 22 \Rightarrow \delta \geq 23$$

$$\varepsilon > \delta \geq 23 \Rightarrow \varepsilon > 23 \Rightarrow \varepsilon \geq 24$$

Συνεπώς $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \geq 110$, άτοπο λόγω της (1).

Άρα, δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 x + 3\lambda = \lambda^3 + 2\lambda x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x - 2\lambda x = \lambda^3 - 3\lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$x(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2$$

1. Αν $\lambda=0$ είναι αδύνατη
2. Αν $\lambda=2$ είναι αόριστη
3. Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$ τότε

$$x = \frac{\lambda^3 - 3\lambda - 2}{\lambda^2 - 2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2}{\lambda(\lambda - 2)} \Leftrightarrow x = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda}$$

3. Η ανίσωση γράφεται:

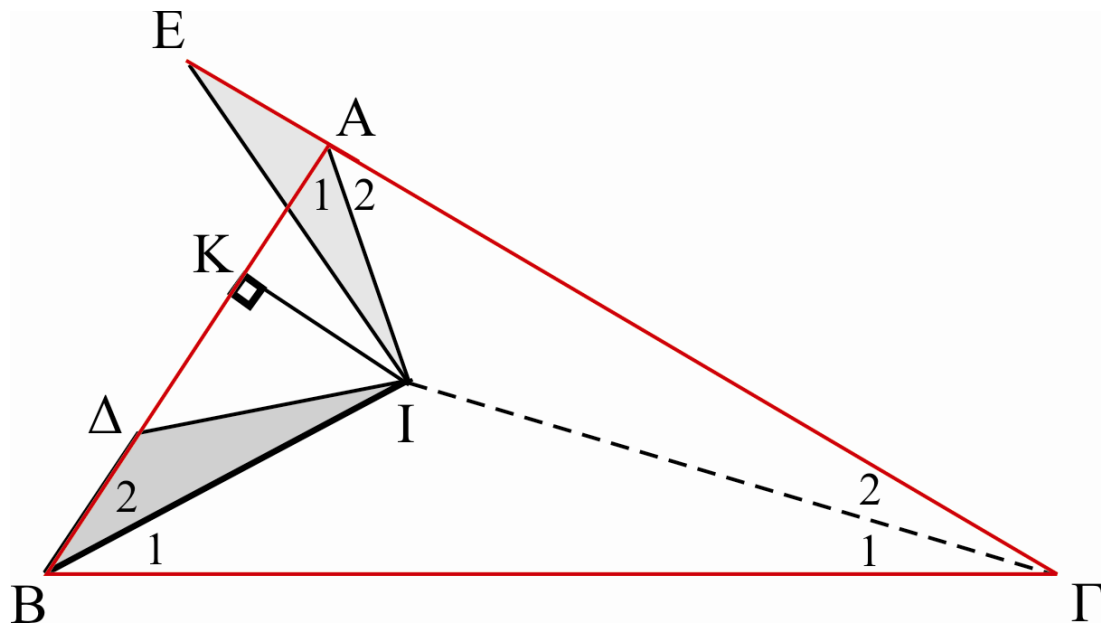
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + 2\frac{\alpha}{\gamma} + 2\frac{\gamma}{\beta} + 2\frac{\beta}{\alpha} \geq 3\frac{\alpha}{\gamma} + 3\frac{\gamma}{\beta} + 3\frac{\beta}{\alpha}, \text{ αρκεί}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \geq 0, \text{ αρκεί}$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right] \geq 0,$$

η οποία ισχύει.

4.



Αν $\Gamma\text{E}=\alpha$ τότε $\text{AE}=\alpha-\beta=\text{B}\Delta$ και ΓI η τρίτη διχοτόμος.

Έχουμε $\overset{\Delta}{\Gamma\text{E}} = \overset{\Delta}{\Gamma\text{B}}$ διότι $\overset{\Delta}{\Gamma\text{I}} = \overset{\Delta}{\Gamma\text{I}}$, $\overset{\Delta}{\Gamma\text{E}} = \overset{\Delta}{\Gamma\text{B}}$ και $\overset{\Lambda}{\Gamma_1} = \overset{\Lambda}{\Gamma_2}$ άρα $\overset{\Lambda}{\text{E}} = \overset{\Lambda}{\text{B}_1}$, $\text{IE}=\text{IB}$.

Άρα $\overset{\Delta}{\text{IAE}} = \overset{\Delta}{\text{IB}\Delta}$ διότι $\text{B}\Delta=\text{AE}$, $\text{IE}=\text{IB}$ και $\overset{\Lambda}{\text{E}} = \overset{\Lambda}{\text{B}_1} = \overset{\Lambda}{\text{B}_2}$, άρα $\text{IA}=\text{I}\Delta$.

Β' τρόπος

Αρκεί το I να ανήκει στη μεσοκάθετο του $\text{A}\Delta$. Αν δηλαδή $\text{IK}\perp\text{A}\Delta$, αρκεί $\text{KA}=\text{K}\Delta$. Πράγματι $\text{KA}=\tau-\alpha$ και $\text{K}\Delta=|\text{BK}-\text{B}\Delta|=|\tau-\beta-(\alpha-\beta)|=|\tau-\alpha|=\tau-\alpha$, αφού $\tau>\alpha$.

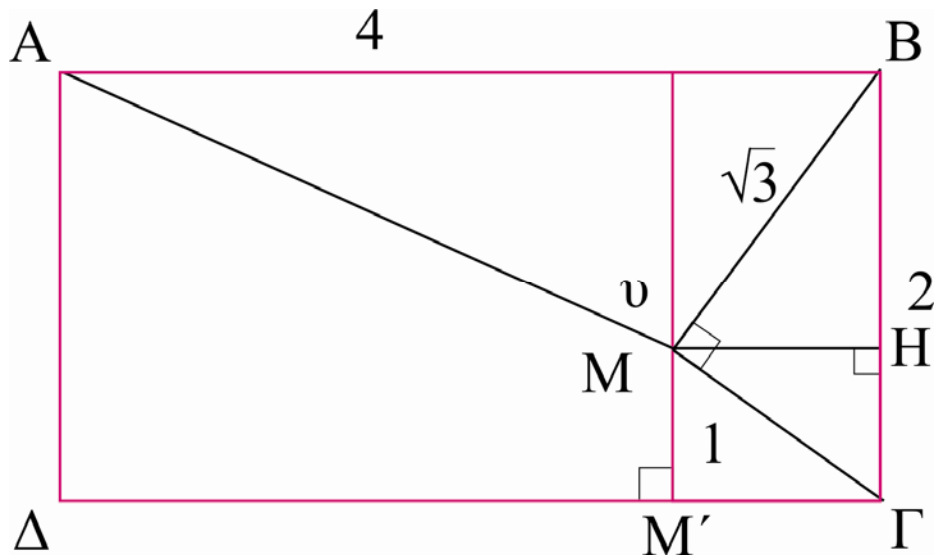
ΛΥΣΕΙΣ Β' τάξη Λυκείου

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες, τότε

$$x_1 + x_2 = 2006\kappa + 1 \quad (1) \text{ και } x_1 \cdot x_2 = 2007 \quad (2).$$

Από την (2) προκύπτει ότι οι x_1, x_2 θα είναι περιττοί. Αλλά τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2$ θα είναι άρτιος, οπότε δεν θα ισχύει η (1).

2.



Παρατηρούμε ότι $(\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4 = 2^2$ οπότε το τρίγωνο MBΓ είναι ορθογώνιο στο M. Επειδή

$$M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \text{ έχουμε } \hat{M}\hat{B}\overset{\wedge}{\Gamma} = 30^0,$$

οπότε $\hat{M}\overset{\wedge}{\Gamma}\hat{B} = 60^0$ και $\hat{M}\overset{\wedge}{\Gamma}\overset{\wedge}{\Delta} = 30^0$. Έστω

$MM' \perp \Delta\Gamma$, τότε $MM' = \frac{1}{2}$ άρα $v = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Το

εμβαδόν του $M\hat{A}B$ είναι $E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3..$

β' τρόπος

$MB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ οπότε $3 = 2 \cdot v$ άρα $v = \frac{3}{2}$

3. Είναι

$$\begin{aligned} \kappa &= (2+2^2+2^3+2^4) + 2^4(2+2^2+2^3+2^4) + \dots + 2^{2004}(2+2^2+2^3+2^4) = \\ &= 30(1+2^4+2^8+\dots+2^{2004}) = \text{πολ. } 30 \end{aligned}$$

4. α) Από τη γνωστή ανισότητα: $\frac{\alpha + \beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$ όπου $\alpha,$

β θετικοί με $\alpha \neq \beta$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{6}$$

Οπότε $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} > 2\sqrt[6]{6}$.

Αρκεί λοιπόν

$$2\sqrt[6]{6} \geq \sqrt[3]{19}, \quad \text{ή} \quad 2^6 \cdot 6 \geq 19^2, \quad \text{ή} \quad 384 \geq 361$$

που ισχύει.

$$\beta) \text{ Αν } \lambda = \frac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} \text{ τότε}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \text{ οπότε } \lambda^2 < 2.$$

Η εξίσωση για $x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την $x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$ με $\Delta = 4(\lambda^2 - 2) < 0$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

β' τρόπος

$$\begin{aligned} x^2 - 2\lambda x + 2 &= x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + 2 = \\ &= (x - \lambda)^2 + (2 - \lambda^2) \geq 2 - \lambda^2 > 0 \end{aligned}$$

ΛΥΣΕΙΣ Γ' τάξη Λυκείου

1. Για $x = 0$ έχουμε $f(f(y)) = -f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
Για $y = 0$ έχουμε $f(f(x)) = x - f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα

$$f(f(x)) = -f(x) \text{ και } f(f(x)) = x - f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$-f(x) = x - f(0) \quad \eta$$

$$f(x) = f(0) - x \quad (1) \quad \text{και} \quad f(-x) = f(0) + x \quad (2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) + f(-x) = 2f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι σταθερή.

2. Έστω ότι η εξίσωση έχει μια ακέραια λύση p . Τότε

$$\begin{aligned}
3^{\rho+1} - \rho \cdot 3^\rho - 4\rho - 1 = 0 &\Rightarrow 3^\rho(3 - \rho) = 4\rho + 1 \\
\Rightarrow 3^\rho = \frac{4\rho + 1}{3 - \rho} & \text{(αφού προφανώς } \rho \neq 3) \Rightarrow \frac{4\rho + 1}{3 - \rho} > 0 \\
\Rightarrow (4\rho + 1)(\rho - 3) < 0 &\Rightarrow -\frac{1}{4} < \rho < 3 \Rightarrow \rho \in \{0, 1, 2\}.
\end{aligned}$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι αριθμοί $\rho=0$ και $\rho=1$ δεν είναι λύσεις της εξίσωσης. Ο αριθμός $\rho=2$ όμως είναι λύση της εξίσωσης. Άρα η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση $\rho=2$.

3. Επειδή

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1 = |z_1 + z_2|^2$$

αρκεί να δείξουμε ότι: $\frac{|z_1|^2}{\sigma \nu^2 \theta} + \frac{|z_2|^2}{\eta \mu^2 \theta} \geq |z_1 + z_2|^2$.

Πράγματι

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma \nu^2 \theta} + \frac{|z_2|^2}{\eta \mu^2 \theta} = (\sigma \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta) \left(\left(\frac{|z_1|}{\sigma \nu \theta} \right)^2 + \left(\frac{|z_2|}{\eta \mu \theta} \right)^2 \right) \geq (|z_1| + |z_2|)^2 \geq |z_1 + z_2|^2$$

4. Από την ισότητα $B\hat{K}\Gamma = B\hat{\Lambda}\Gamma = B\hat{M}\Gamma$ έχουμε ότι τα K, Λ, M βρίσκονται στο ίδιο τόξο χορδής $B\Gamma$. Έστω

$$B\hat{K}\Gamma = B\hat{\Lambda}\Gamma = B\hat{M}\Gamma = \phi.$$

Αν $KB \cdot K\Gamma = \Lambda B \cdot \Lambda\Gamma = MB \cdot M\Gamma$, τότε

$$\frac{1}{2} KB \cdot K\Gamma \eta \mu \phi = \frac{1}{2} \Lambda B \cdot \Lambda\Gamma \eta \mu \phi = \frac{1}{2} MB \cdot M\Gamma \eta \mu \phi$$

$$\Rightarrow (KB\Gamma) = (\Lambda B\Gamma) = (MB\Gamma)$$

Αυτό σημαίνει ότι τα K, Λ, M θα βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στην $B\Gamma$, άτοπο αφού το μέγιστο πλήθος κοινών σημείων ευθείας και κύκλου είναι 2.