ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\text{ν}}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$, έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{2-\frac{1}{5}}:\dfrac{2-\frac{2}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{9}{5}}:\dfrac{2-1}{9}=\dfrac{10}{9}:\dfrac{1}{9}=\dfrac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$, έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{5-\frac{1}{5}}:\dfrac{5-\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{24}{5}}:\dfrac{\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{10}{24}:\dfrac{5}{18}=\dfrac{10}{24}\cdot\dfrac{18}{5}=\dfrac{180}{120}=\dfrac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega$, $\beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7 .$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21$, $\beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ<ΑΓ$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $Ε\hat{Δ}Ζ$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{Β}-\hat{Γ}=20^0$.

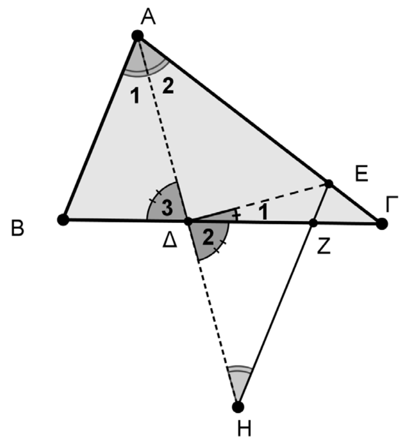
Λύση

1. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$, θα ισχύει: $\hat{Α}_1=\hat{Α}_2=\frac{\hat{Α}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Α}_1=\hat{Η}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{Α}_2=\hat{Η}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $ΕΔ\perp ΑΗ$ και $Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$



2. Επειδή $Γ\hat{Δ}Ε=Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{Ε}_1=90^\circ-\hat{Δ}_2=90^\circ-\hat{Δ}_3 .$$

Σχήμα 1

Η $\hat{Δ}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$, οπότε θα είναι $\hat{Δ}_3=\frac{\hat{Α}}{2}+\hat{Γ}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{Ε}_1=90^\circ-\hat{Δ}_2=90^\circ-\frac{\hat{Α}}{2}-\hat{Γ}=\frac{\hat{Α}}{2}+\frac{\hat{Β}}{2}+\frac{\hat{Γ}}{2}-\frac{\hat{Α}}{2}-\hat{Γ}=\frac{\hat{Β}-\hat{Γ}}{2}=\frac{20^o}{2}=10^o .$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2$.

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2}$$

$$= \left(2 \cdot 10^{6-4} \right)^{-2} = \left(2 \cdot 10^2 \right)^{-2} = \frac{1}{\left(2 \cdot 10^2 \right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \leq 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \leq 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \leq 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \leq 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \leq 8x \Leftrightarrow 3 \leq 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Λύση

(α) Επειδή είναι $(\varepsilon) \| (\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon):\ y=2x+4.$$

(β) Επειδή ισχύουν $2\cdot(-4)+4=-4$ και $2\cdot(-1)+4=2$, τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας (ε). Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

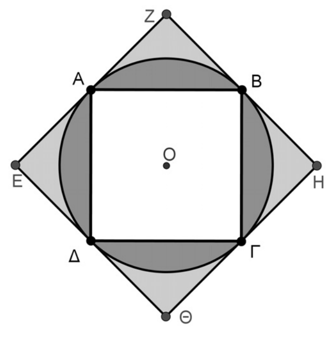
$$\mathrm{MK}=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{(-4+1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3{,}1415$).

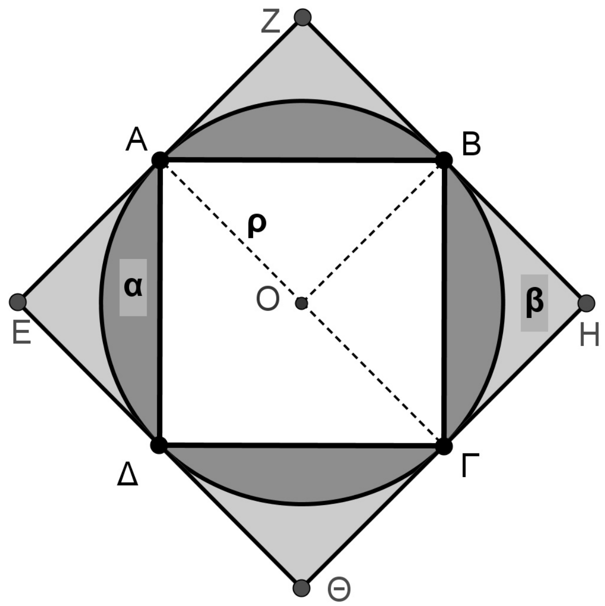
Λύση

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp \mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1, θα είναι:

$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $\mathrm{OA} \perp \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{O\Gamma} \perp \mathrm{H\Theta}$, έπεται ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $\mathrm{ZH} = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428...., \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0\\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{array}\right\}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1,\ \beta=-7,$ $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x \Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x\left(1+3x+3x^2+x^3\right)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$

$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+x\right)^2+2\left(x^2+x\right)+1}{1+x+x^2}=\frac{\left(x^2+x+1\right)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+\left(1+x\right)^3}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)}{x^2+1}=\frac{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}\left(x\right)=\mathrm{B}\left(x\right)-\Gamma\left(x\right)=x^2+x+1-\left(x+1\right)=x^2.$$

3. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa\left(x+2\right)-\frac{3\left(\kappa x-1\right)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa\left(x+2\right)-3\left(\kappa x-1\right)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$
$$\Leftrightarrow\left(\kappa+1\right)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa=-1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-5$ και είναι αδύνατη.

2. Αν $\kappa\in\mathbb{Z}-\{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{8\kappa+3}{\kappa+1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x=\frac{8\kappa+3}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\left(\kappa+1\right)-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$
$$x=8-\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\kappa+1\in\{-1,1,-5,5\}\Leftrightarrow\kappa\in\{-2,0,-6,4\}.$$

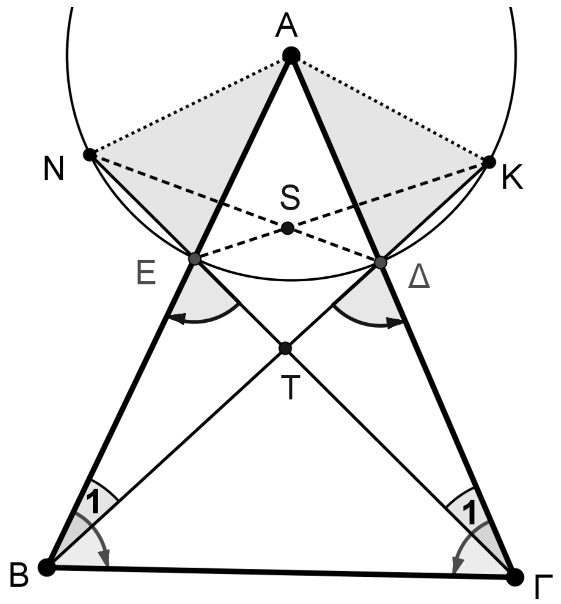
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ, ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ, Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ, ΕΚ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{B\hat{T}\Gamma = \Gamma\hat{T}B}. \qquad (1)$$

- $\mathrm{A\hat{\Delta}B = A\hat{E}\Gamma}$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$\mathrm{B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma} \qquad (2)$$

- $$\mathrm{\Delta B = \Delta\Gamma}. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $\mathrm{B\hat{T}\Gamma = \Gamma\hat{T}B}$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $\mathrm{BT\Gamma}$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο T θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $\mathrm{B\Gamma}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{BT\Gamma}$ έχουμε: $\mathrm{TB = T\Gamma}$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $\mathrm{TE = T\Delta}$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $\mathrm{B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma}$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $\mathrm{A\Delta K}$ και AEN. Άρα $\mathrm{\Delta K = EN}$ και επειδή $\mathrm{TE = T\Delta}$, καταλήγουμε $\mathrm{TK = TN}$.

Από τις ισότητες $\mathrm{TE = T\Delta}$ και $\mathrm{TK = TN}$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων ETK και $\mathrm{\Delta TN}$.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $\mathrm{SEN = S\Delta K}$ και στη συνέχεια η ισότητα $\mathrm{SAE = SAK}$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}.$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Λύση
(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:

$$\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}=\frac{(x+2)\left(2x^2-3x+1\right)+x-4}{x^2-2}$$

$$=\frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2}=\frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$$

$$=\frac{2x\left(x^2-2\right)+x^2-2}{x^2-2}=\frac{\left(x^2-2\right)(2x+1)}{x^2-2}=2x+1.$$

(β) Για $x=2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την Α, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{A}=\mathrm{K}(2010)=2\cdot 2010+1=4021.$$

Πρόβλημα 2
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Λύση
Για $a=b$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{2}{x-a}=\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow x=a+2c^2$.
Έστω $a\neq b$. Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b)=c^2(x-a+x-b),\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2-\left(a+b+2c^2\right)x+ab+(a+b)c^2=0,\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta=\left(a+b+2c^2\right)^2-4ab-4(a+b)c^2=(a+b)^2-4ab+4c^4=(a-b)^2+4c^4>0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2}=\frac{a+b+2c^2\pm\sqrt{(a-b)^2+4c^4}}{2}. \qquad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα a και b δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x=a$ η εξίσωση γίνεται: $(a-a)(x-b)=c^2(a-a+x-b)\Leftrightarrow 0=c^2(a-b)$, που είναι άτοπο, αφού είναι $c \neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a \neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x = b$. Επομένως, για $a \neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες (2).

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2,\ z = y^3 + 2y - 2,\ x = z^3 + 2z - 2.$$

Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y - z = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + 2\right) \qquad (1)$$

$$z - x = (y - z)\left(y^2 + yz + z^2 + 2\right) \qquad (2)$$

Επειδή είναι $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$ και ομοίως προκύπτει ότι $y^2 + yz + z^2 + 2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} + 2 > 0$, αν υποθέσουμε ότι είναι $x > y$, τότε από την (1) λαμβάνουμε ότι $y > z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z > x$.

Έτσι έχουμε $x > y > z > x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x < y$. Επομένως έχουμε $x = y,$ οπότε θα είναι και $y = z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

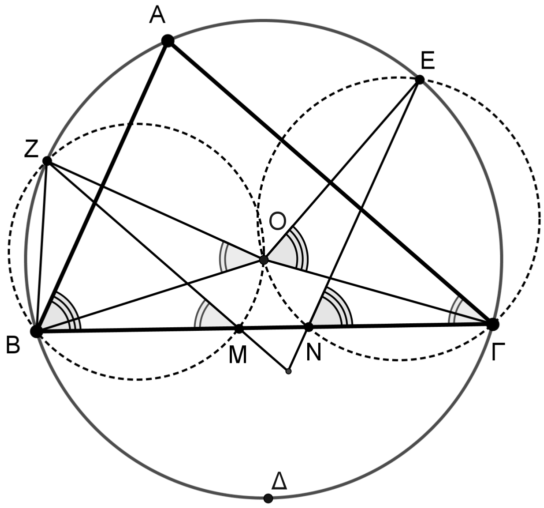
α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω K) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Λύση

α) Εφόσον η ZM είναι παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, θα ισχύει: $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{Z\hat{O}B}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ και βαίνει στο τόξο ZB (που είναι το μισό του τόξου AB). Άρα $\mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο BMOZ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $E\hat{N}\Gamma = E\hat{O}\Gamma = \hat{B}$ και ότι το τετράπλευρο ΓΝΟΕ είναι εγγράψιμο.

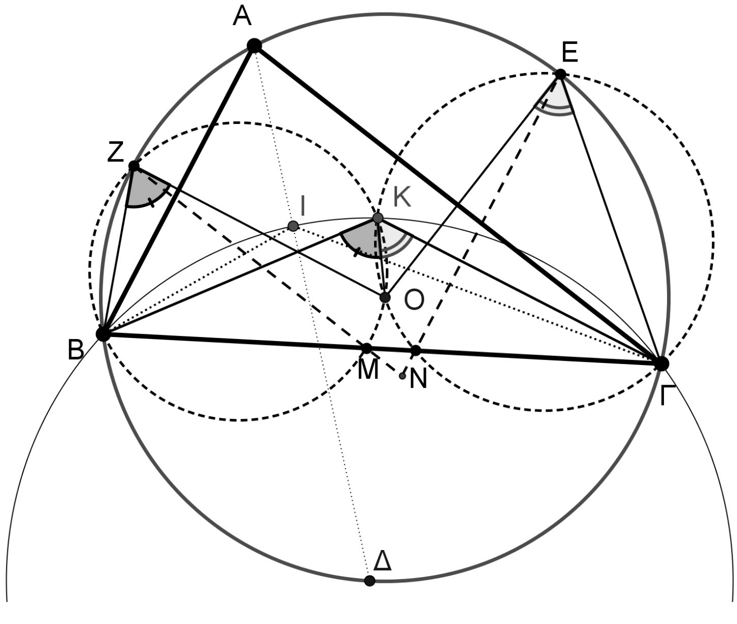
β) Επειδή το σημείο Ι είναι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{I}B = \Delta\hat{B}I = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} \text{ και } \Delta\hat{I}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}I = \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta B = \Delta I = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία Β, Ι, Κ, Γ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$B\hat{K}\Gamma = \hat{A} + \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} = B\hat{I}\Gamma.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο ΟΒΖ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OB}=\mathrm{OZ}=R)$, με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}=\hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O}=90^{o}-\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{OE}=R)$, με $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}=\hat{\mathrm{B}}$. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O}=90^{o}-\dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}+\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O}+\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O}=90^{o}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}+90^{o}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$
$$=180^{o}-\left(90^{\circ}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right)=90^{\circ}+\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα x^2+3x+2 και x^2+x-2 έχουν παράγοντα το $x+2$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+2\right)^4\left[\left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^4=0 \text{ ή } \left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4+12x^2-14=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4+6x^2-7=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2=1 \text{ ή } x^2=-7 \text{ (αδύνατη)}$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

2ος τρόπος

Αν θέσουμε $a=x^2+3x+2,\ b=x^2+x-2$, τότε $a-b=2x+4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$a^4+b^4=\left(a-b\right)^4 \Leftrightarrow a^4+b^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

$$\Leftrightarrow -ab\left(2a^2-3ab+2b^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } 2a^2-3ab+2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0,$$

αφού η εξίσωση $2a^2-3ab+2b^2=0$, αν $ab\neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2-3u+2=0,\ u=\frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \text{ ή } x^2+x-2=0 \text{ ή } x^2+3x+2=x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=-2 \text{ (διπλή)}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)}$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$, , αν το σύστημα

$$\left.\begin{cases}\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda\\ 2x-y=-\lambda\end{cases}\right\},\qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda \\ 2x-y=-\lambda\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha\left(x^2+(2x+\lambda)^2\right)+2x+2x+\lambda=\lambda \\ y=2x+\lambda\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}5\alpha x^2+4(\alpha\lambda+1)x+\alpha\lambda^2=0 & (1) \\ y=2x+\lambda & (2)\end{array}\right\}$$

Αν ήταν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta=16(\alpha\lambda+1)^2-20\alpha^2\lambda^2=4\left(-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4\right)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4 \geq 0. \qquad (3)$$

Όμως , το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4$ έχει διακρίνουσα $\Delta'=80\alpha^2>0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1<0<\lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2=-\dfrac{4}{\alpha^2}<0$).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4<0$, για $\lambda<\lambda_1$ ή $\lambda>\lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha=0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x=0$, οπότε προκύπτει ότι $y=\lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $(x,y)=(0,\lambda)$. Άρα είναι $\alpha=0$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,\ldots$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,\ldots.$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\leq 8\cdot 10^3$.

Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1=\omega,\ d_n=d_1+(n-1)\omega=n\omega, n=2,3,\ldots.$$

οπότε θα είναι:

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\ldots+(a_n-a_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \omega+2\omega+\ldots+n\omega=a_n-a_0 \Leftrightarrow a_n=a_0+(1+2+\ldots+n)\omega$$

$$\Leftrightarrow a_n=a_0+\frac{n(n+1)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα S_{n+1} έχουμε:

$$S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n=(n+1)a_0+\left(\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left((1^2+1)+(2^2+2)+\ldots+(n^2+n)\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\omega+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\omega.$$

2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, τότε έχουμε $\omega=6$ και

$$a_n=1+3n(n+1),\ S_{n+1}=n+1+n(n+1)(n+2)=(n+1)\left[1+n(n+2)\right]=(n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$a_n>10^3 \text{ και } S_{n+1}\le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow a_n=1+3n(n+1)>10^3,\ S_{n+1}=(n+1)^3\le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow$$

$$n(n+1)>333,\ n+1\le 2\cdot 10 \Leftrightarrow n>18,\ n\le 19 \Leftrightarrow n=18 \text{ ή } n=19.$$

αφού είναι $17\cdot 18=306,\ 18\cdot 19=342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος n είναι ο 18.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}<\text{ΒΓ}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β}$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Τ, τη διχοτόμο της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β}$ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Α, Ι, Λ, Μ και Α, Ι, Κ, Ν είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

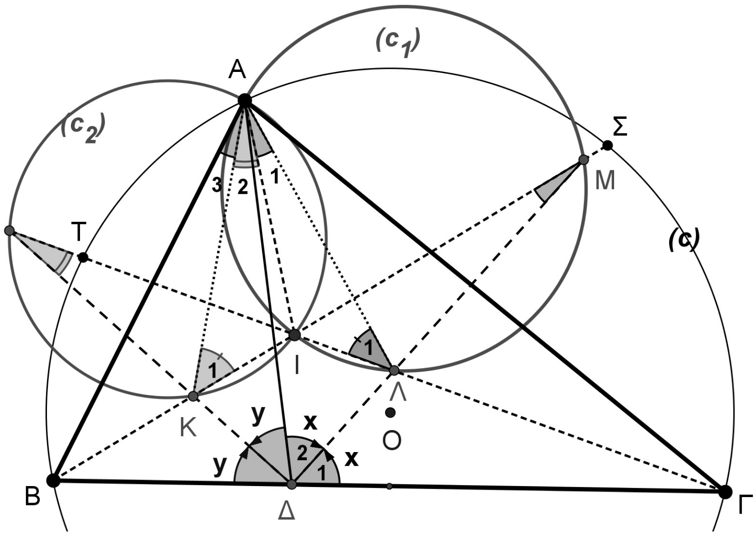
β) Αν η ΑΔ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, που αντιστοιχεί στη κορυφή Α τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Κ, Λ είναι τα έκκεντρα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ αντίστοιχα.

Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\text{Α}}_1=\text{Ι}\hat{\text{Α}}\Gamma-\Lambda\hat{\text{Α}}\Gamma=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-\frac{\Delta\hat{\text{Α}}\Gamma}{2}=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-\frac{180^0-2\hat{x}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-90^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\hat{x}=\hat{x}-\frac{\hat{\text{Β}}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο $M\Delta B$ έχουμε: $\hat{x}=\hat{M}+\frac{\hat{B}}{2}\Leftrightarrow \hat{M}=\hat{x}-\frac{\hat{B}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_1=\hat{M}=\hat{x}-\frac{\hat{B}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $AI\Lambda M$ είναι εγγράψιμο.

Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_2 = I\hat{A}B - K\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2}-\frac{\Delta\hat{A}B}{2} = \frac{\hat{A}}{2}-\frac{180^0-2\hat{y}-\hat{B}}{2}=\frac{\hat{A}}{2}-90^o+\frac{\hat{B}}{2}+\hat{y}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $N\Delta\Gamma$ έχουμε: $\hat{y}=\hat{N}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}\Leftrightarrow \hat{N}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_2=\hat{N}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $AIKN$ είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$A\hat{I}B=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=90^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } A\hat{I}\Gamma=\hat{B}+\frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}=90^o+\frac{\hat{B}}{2}.$$

Από το τρίγωνο AIK έχουμε:

$$\hat{K}_1=180^o-A\hat{I}B-\hat{A}_2=180^o-90^o-\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\hat{N}=90^o-\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\hat{y}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=90^o-\hat{y}.$$

Από το τρίγωνο $AI\Lambda$ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1=180^o-A\hat{I}\Gamma-\hat{A}_1=180^o-90^o-\frac{\hat{B}}{2}-\hat{M}=90^o-\frac{\hat{B}}{2}-\hat{x}+\frac{\hat{B}}{2}=90^o-\hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $A\Delta\perp B\Gamma$ τότε $\hat{x}=\hat{y}=45^o$, οπότε $\hat{K}_1=\hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{K}_1,\hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή AI).

Παρατηρήσεις

α) Τα κέντρα των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκονται επάνω στην ΣT.

β) Το σημείο A είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου $\Delta KI\Lambda MN$.