ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)=\frac{88}{5}\cdot\frac{5}{44}-\frac{39}{5}\cdot\frac{5}{39}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}.$$

Λύση
Είναι $\text{ΜΚΔ}\left(12,30,54\right)=6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

Για $\kappa=2$ έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}.$

Για $\kappa = 3$ ο διαιρέτης $\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$ της παράστασης Β γίνεται $\dfrac{\frac{3-3}{2}}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$, ενώ ο διαιρετέος γίνεται $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{5} \neq 0$, οπότε η παράσταση Β δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

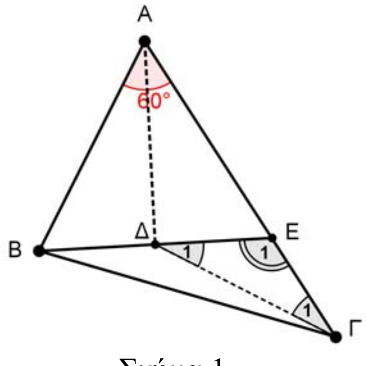
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2{,}5 \cdot \dfrac{6}{100} = 0{,}15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2{,}5 - 0{,}15 = 2{,}35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050 + 407 = 1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457 : 2{,}35 = 620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800 \cdot \dfrac{8}{100} = 64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800 - (620 + 64) = 116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $A\Gamma = \dfrac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $\mathrm{AB}=\alpha$.

Εφόσον $\mathrm{A\Gamma}=\frac{3}{2}\mathrm{AB}=\frac{3}{2}\alpha$ και $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}=\alpha$, έχουμε:

$$\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AE}=\frac{3}{2}\alpha-\alpha=\frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB}=\mathrm{AE}$) και η γωνία του $\hat{\mathrm{A}}$ είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$ είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $\mathrm{\Delta E}=\frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\mathrm{\Delta E\Gamma}$ είναι ισοσκελές, αφού $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{E\Gamma}=\frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{\mathrm{E}}_1=180^\circ-\mathrm{A\hat{E}B}=180^\circ-60^\circ=120^\circ,$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1=\dfrac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^o$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}},\ \text{αν είναι } x=2^{-10},y=4^{-8},z=8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έχουμε:

$$x=2^{-10},y=4^{-8}=\left(2^2\right)^{-8}=2^{-16},z=8^{-6}=\left(2^3\right)^{-6}=2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}=x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}&=\left(2^{-10}\right)^2\cdot\left(2^{-16}\right)^4\cdot\left(2^{-18}\right)^6\cdot 2^{182}\\&=2^{-20}\cdot 2^{-64}\cdot 2^{-108}\cdot 2^{182}=2^{-10}.\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}\Pi&=3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}=3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+2^4\cdot 3^6\right)^{-1}=3\cdot\left[2^2\cdot 3^3\left(13+2^2\cdot 3^3\right)\right]^{-1}\\&=3\cdot\left(2^2\cdot 3^3\cdot 121\right)^{-1}=3\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-3}\cdot 121^{-1}=2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 11^{-2}.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{K}=\frac{2^{-10}}{2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 121^{-1}}=\frac{3^2\cdot 121}{2^8}=\frac{3^2\cdot 11^2}{2^8}=\left(\frac{33}{2^4}\right)^2=\left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x-5\alpha+2<\alpha\left(x-3\right)+2\left(\alpha-1\right).$$

Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot 3-5\alpha+2<\alpha(3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow 12-5\alpha+2<2\alpha-2\Leftrightarrow 16<7\alpha\Leftrightarrow \alpha>\frac{16}{7}.$$

Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot(-3)-5\alpha+2<\alpha(-3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow -12-5\alpha+2<-6\alpha+2\alpha-2$$

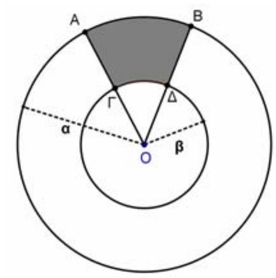
$$\Leftrightarrow -8<\alpha\Leftrightarrow \alpha>-8.$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης , όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha>\frac{16}{7}$ και $\alpha>-8$, δηλαδή όταν $\alpha>\frac{16}{7}$.

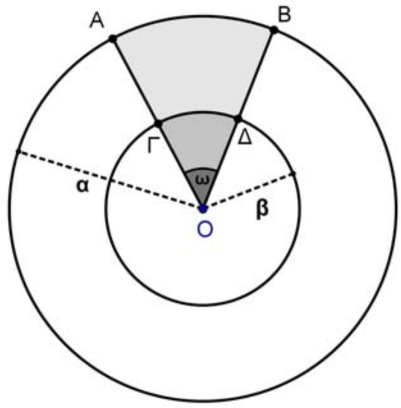
Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=\mathrm{A\hat{O}B}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$



Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΔΓ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $(\mathrm{O},\widehat{\mathrm{AB}})$ και $(\mathrm{O},\widehat{\Gamma\Delta})$, δηλαδή είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\Gamma)=\pi\alpha^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}-\pi\beta^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, ισούται με $\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)=\pi(\alpha^2-\beta^2)$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\Gamma)}{\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2\pi(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι $\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, έχουμε

$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3 = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}.$$

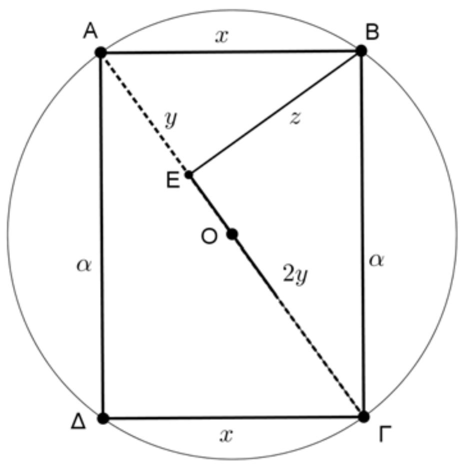
Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΔ = \alpha$ cm και $ΑΒ < ΑΔ$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο $ΑΓ$ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $ΕΓ = 2\cdot ΑΕ$, να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς ΑΒ

(ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω $ΑΒ = ΓΔ = x$, $ΑΕ = y$, $ΕΓ = 2y$ και $ΒΖ = z$.

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα $ΑΒΕ$ έχουμε:

$$x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2. \qquad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα $ΒΓΕ$ έχουμε:

$$\alpha^2 = 4y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = \alpha^2 - 4y^2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2 - 4y^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = \alpha^2 - 3y^2 \qquad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ έχουμε:

$$9y^2 = x^2 + \alpha^2 \Rightarrow x^2 = 9y^2 - \alpha^2. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2 = \alpha^2 - 3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \alpha^2 - 3\cdot\frac{\alpha^2}{6} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η $ΑΓ = 3y$, οπότε η ακτίνα του είναι $R = \frac{3}{2}y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. Το εμβαδό του κύκλου είναι $E = \pi R^2 = \pi\cdot\frac{6\alpha^2}{16} = \frac{3\pi\alpha^2}{8}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x\left(x-2\right)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Λύση

Η εξίσωση $x\left(x-2\right)=24 \Leftrightarrow x^2-2x-24=0$ είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=100$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x=\frac{2\pm 10}{2} \Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=-4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα $x=-4$, γιατί $\left(-4\right)^2=16<25$, ενώ $6^2=36>25$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha-2\beta\right)}{\left(\alpha+\beta\right)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha-2\beta\right)\\
&=\alpha^3+\beta^3-\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\beta\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-2\beta\right)\\
&=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)-\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-\beta\right)+\beta\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-2\beta\right)\\
&=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta+\beta\alpha-2\beta^2\right)\\
&=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta\right)\\
&=\left(\alpha+\beta\right)\left[\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-\beta\right)-\left(\alpha-\beta\right)\right]\\
&=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha+\beta-1\right).
\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$\left(\alpha+\beta\right)^2-\alpha-\beta=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha+\beta-1\right)$$

Άρα, αφού $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$, έχουμε

$$\mathrm{K}\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha+\beta-1\right)}{\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha+\beta-1\right)}=\alpha-\beta.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-4\left(\lambda^2-1\right)=4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = -\lambda + 1$ και $x_2 = -\lambda - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-5,2)$, όταν

$$-5 < -\lambda + 1 < 2 \text{ και } -5 < -\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -6 < -\lambda < 1 \text{ και } -4 < -\lambda < 3$$

$$\Leftrightarrow -1 < \lambda < 6 \text{ και } -3 < \lambda < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

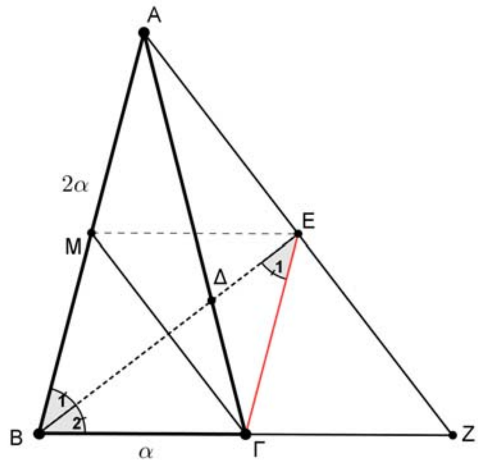
$$(-\lambda+1)^2 + (-\lambda-1)^2 = 20 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 3,$$

Επομένως, αφού πρέπει $-1 < \lambda < 4$ το ζητούμενο ισχύει για $\lambda = 3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΒΓ} = \alpha$ και $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} = 2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή $\text{ΕΓ} // \text{ΑΒ}$, θα ισχύει $\hat{\text{B}}_1 = \hat{\text{E}}_1$ και αφού η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{B}}$, θα είναι $\hat{\text{B}}_1 = \hat{\text{B}}_2$. Επομένως έχουμε $\hat{\text{B}}_2 = \hat{\text{E}}_1$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή: $\text{ΒΓ} = \text{ΓΕ} = \alpha$.

Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος. Λόγω της παραλληλίας των ΕΓ, ΑΒ θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΖ, από τα οποία λαμβάνουμε:

$$\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΒΖ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ΒΖ} = 2 \cdot \text{ΓΖ}$$

Επομένως το σημείο Γ είναι το μέσο της ΒΖ, δηλαδή $\text{ΒΖ} = 2 \cdot \text{ΒΓ} = 2\alpha$. Επειδή είναι και $\text{ΑΒ} = 2\alpha$ το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΒΓΕΜ είναι ρόμβος, διότι: έχει $\text{ΒΜ} = // \text{ΓΕ} = \alpha$ (οπότε ΒΓΕΜ παραλληλόγραμμο) και $\text{ΒΓ} = \text{ΓΕ} = \alpha$ (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα $\text{ΜΕ} = \text{ΒΖ}$ και κατά συνέπεια το Ε είναι μέσο του ΑΖ. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΖ, η ΒΕ είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\kappa\ \alpha \neq 0$ και $-1<\alpha<1$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\mathrm{K}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}-1+\alpha$,

όπου

$$\mathrm{A}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}},\ \mathrm{B}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\ .$$

Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι $1+\alpha>0$ και $1-\alpha>0$, οπότε

$$\mathrm{A}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}=\frac{1+\alpha+1-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$\mathrm{B}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}=\frac{1+\alpha-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}=\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}-1+\alpha=\frac{1}{\alpha}-1+\alpha=\frac{1-\alpha+\alpha^2}{\alpha}.$$

Επειδή είναι $1-\alpha+\alpha^2=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, για όλες τις τιμές του α, έπεται ότι η παράσταση Κ έχει το πρόσημο του α, δηλαδή θετικό, αν $0<\alpha<1$ και αρνητικό, αν $-1<\alpha<0$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2-2\kappa x-1+\kappa^2=0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\kappa^2-4\left(-1+\kappa^2\right)=4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1=\kappa+1$ και $x_2=\kappa-1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(0,5)$, όταν

$$0<\kappa+1<5 \text{ και } 0<\kappa-1<5 \Leftrightarrow -1<\kappa<4 \text{ και } 1<\kappa<6 \Leftrightarrow 1<\kappa<4.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\kappa+1)^4+(\kappa-1)^4=82 \Leftrightarrow 2\kappa^4+12\kappa^2+2=82 \Leftrightarrow \kappa^4+6\kappa^2-40=0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\kappa^2=4 \text{ ή } \kappa^2=-10 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \kappa=2 \text{ ή } \kappa=-2.$$

Επομένως για $\kappa=2$ ισχύει το ζητούμενο, αφού η τιμή $\kappa=-2$ απορρίπτεται λόγω της σχέσης $1<\kappa<4$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3}=\frac{y}{2012y+5}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Λύση
Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+3}{x}=\frac{2012y+5}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{3}{x}=2012+\frac{5}{y}=2012+\frac{7}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{5}{y}=\frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{3}{x}=\frac{5}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=3\lambda,\ y=5\lambda,\ z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747 θα έχουμε

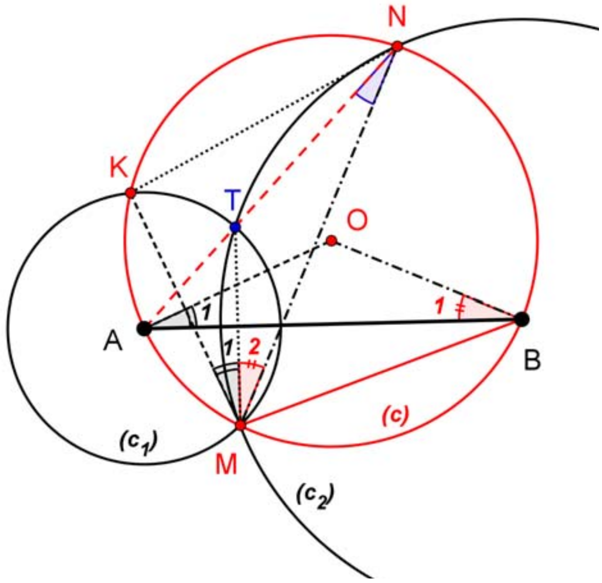
$$x^2+y^2+z^2=83\lambda^2 \,|\, 747 \Rightarrow \frac{747}{83\lambda^2}=\kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{9}{\lambda^2}=\kappa\in\mathbb{Z},$$

Επομένως οι μοναδικές αποδεκτές τιμές για το λ^2 είναι οι 1, 3 και 9.

- Για $\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm1$ έπεται ότι $(x,y,z)=(3,5,7)$ ή $(x,y,z)=(-3,-5,-7)$.
- Για $\lambda^2=3 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{3}$ προκύπτουν για τα x, y, z μη ακέραιες τιμές, άτοπο.
- Για $\lambda^2=9 \Leftrightarrow \lambda=\pm3$ έπεται ότι $(x,y,z)=(9,15,21)$ ή $(x,y,z)=(-9,-15,-21)$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Λύση
Γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 5

Η KM είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_1(A,AM)$. Άρα

η OA είναι μεσοκάθετη της KM. (1)

Η MT είναι κοινή χορδή των κύκλων $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η AB είναι μεσοκάθετη της MT. (2)

Η MN είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η OB είναι μεσοκάθετη της MN. (3)

Από τις καθετότητες (1) και (2), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες).

Από τις καθετότητες (2) και (3), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{B}_1 = \hat{M}_2$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες)

και τελικά από το ισοσκελές τρίγωνο OAB, έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 .$$

Οι τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών μας οδηγούν στην ισότητα: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Η γωνία $A\hat{N}M$ και $A\hat{B}M$ είναι ίσες, διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AM}$.

Η γωνία $T\hat{N}M$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $c_2(B,BM)$, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $T\hat{B}M$, δηλαδή: $T\hat{N}M = A\hat{B}M$

Άρα $A\hat{N}M = T\hat{N}M$ και κατά συνέπεια τα σημεία A,T,N είναι συνευθειακά.

Ισχύει τώρα η ισότητα $A\hat{N}K = A\hat{N}M$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα AM και AK). Επομένως η NA είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{N}M$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Λύση
Επειδή $1+2+3+...+x=\frac{x(x+1)}{2}$, για κάθε θετικό ακέραιο x, η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{x(x+1)}=\frac{2011}{2013}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2011}{2013}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x+1}=\frac{2011}{2013}\Leftrightarrow\frac{2}{x+1}=\frac{2}{2013}\Leftrightarrow x=2012.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Λύση
Από την υπόθεση έπεται ότι η εξίσωση

$$ax^2+bx+c=cx+b\Leftrightarrow ax^2+(b-c)x+(c-b)=0$$

έχει μοναδική λύση. Επομένως η διακρίνουσά της ισούται με 0, δηλαδή

$$\Delta=(b-c)^2+4a(b-c)=0\Leftrightarrow(b-c)(b-c+4a)=0\Leftrightarrow c-b=4a,$$

αφού $b\neq c$.
Όταν $c-b=4a$ η εξίσωση γίνεται:

$$ax^2-4ax+4a=0\Leftrightarrow a\left(x^2-4x+4\right)=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2.$$

Άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $\mathrm{M}(2,2c+b)$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Λύση
Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+y}{x}=\frac{2012y+z}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{y}{x}=2012+\frac{z}{y}=2012+\frac{7}{z}\Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=7\lambda^3$, $y=7\lambda^2$, $z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147 θα έχουμε

$$x^2+y^2+z^2=147\Leftrightarrow 49\lambda^6+49\lambda^4+49\lambda^2=147$$

$$\Leftrightarrow \lambda^6+\lambda^4+\lambda^2=3\Leftrightarrow \lambda^6-1+\lambda^4-1+\lambda^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+\lambda^2+1+\lambda^2+1+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+2\lambda^2+3\right)=0\Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1,$$

αφού η εξίσωση $\lambda^4+2\lambda^2+3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$.

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες ακεραίων είναι:

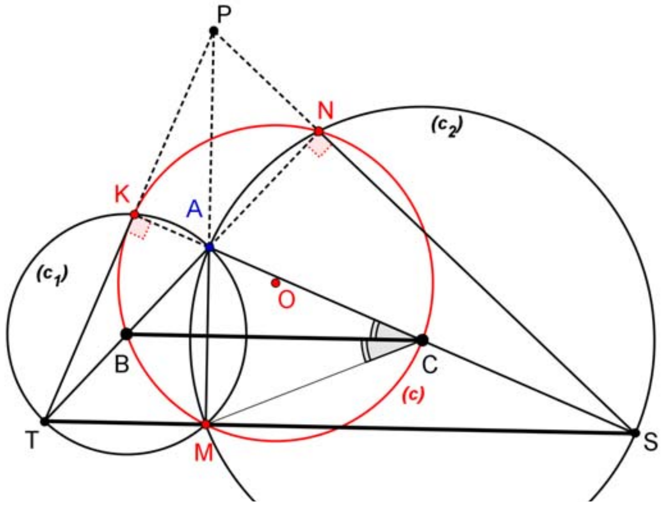
$$\left(x,y,z\right)=\left(7,7,7\right) \text{ ή } \left(x,y,z\right)=\left(-7,-7,-7\right)$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι τα σημεία K,A,C,S και N,A,B,T είναι συνευθειακά.



Σχήμα 6

Η AM είναι η κοινή χορδή των κύκλων $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$.

Άρα η διάκεντρός τους BC είναι μεσοκάθετη της AM.

Η BC όμως είναι παράλληλη με την TS (από την κατασκευή του σχήματος). Άρα η TS είναι κάθετος με την AM ($AM \perp TS$). Δηλαδή $A\hat{M}T = A\hat{M}S = 90^o$.
Από την τελευταία ισότητα γωνιών προκύπτει ότι τα σημεία A,T και A,S είναι αντιδιαμετρικά στους κύκλους $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$ αντίστοιχα.
Επομένως, τα σημεία A,C,S και A,B,T είναι συνευθειακά.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K,A,C και N,A,B είναι συνευθειακά.
Στον κύκλο $c(O,R)$, το σημείο B είναι μέσο του τόξου KM (διότι BM, BK είναι ακτίνες του κύκλου $c_1(B,BM)$). Άρα οι εγγεγραμμένες στα τόξα BM και BK γωνίες, θα είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως

$$K\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (1).$$

Εφόσον η διάκεντρος BC είναι μεσοκάθετη της AM, τα τρίγωνα ABC και MBC είναι ίσα, οπότε :

$$A\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (2).$$

Από τις ισότητες των γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $K\hat{C}B = A\hat{C}B$ και κατά συνέπεια τα σημεία K,A,C είναι συνευθειακά.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία N,A,B είναι επίσης συνευθειακά.
Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AMTK$ και $AMSN$ συμπεραίνουμε ότι:

$$A\hat{K}T = A\hat{N}S = 90^o.$$

Επομένως προκύπτουν οι καθετότητες $TK \perp KS$ και $TN \perp NS$.
Σε συνδυασμό τώρα με την καθετότητα $AM \perp TS$, συμπεραίνουμε ότι τα AM, KT, NS είναι ύψη του τριγώνου ATS, οπότε θα συγκλίνουν στο ορθόκεντρό του.

Παρατηρήσεις

Έστω P το ορθόκεντρο του τριγώνου ATS. Τότε τα σημεία P,A,T,S αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα και κατά συνέπεια το σημείο A είναι ορθόκεντρο του τριγώνου PTS.

Το τρίγωνο KMN είναι ορθικό του τριγώνου PTS και κατά συνέπεια το σημείο A είναι έκκεντρο του τριγώνου KMN.