



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

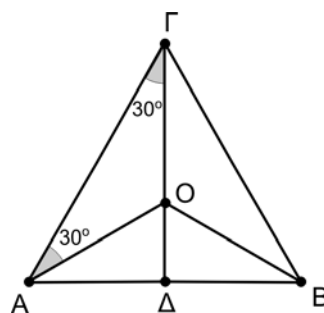
$$A = \left(\frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3} \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2}.$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και ABO είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά AB. Η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση AB στο σημείο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς την πλευρά AB και το σημείο Δ είναι το μέσο της AB.

(β) Αν $\widehat{O\hat{A}G} = \widehat{O\hat{A}B} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.



Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}} + \frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2\nu} + 2018.$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80 τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Πρόβλημα 3

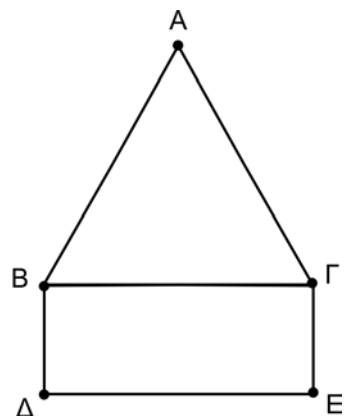
Γράφουμε θετικό ακέραιο A χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο A που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς a . Το σχήμα $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την πλευρά $B\Delta = \frac{a}{2}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = A\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του a τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν όλες οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο A χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο A που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Πρόβλημα 4

Στη πλευρά $B\Gamma$ ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε σημείο M (διαφορετικό από το μέσο της $B\Gamma$) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο K του MB και ακτίνα KB) τέμνει την AB στο Δ . Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο Λ του $M\Gamma$ και ακτίνα $\Lambda\Gamma$) τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Οι ευθείες $K\Delta$ και ΛE τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Π και P αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες $K\Delta$ και ΛE τέμνονται στο σημείο T , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Pi P T$ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς $B\Gamma$.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ρ είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι λύση και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με $\hat{A} = 45^\circ$. Ο κύκλος C_Γ ($\Gamma, \Gamma A$) (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω $C_{B\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_Γ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ο αριθμός

$$A = \frac{n^7 + n^6 + n^5 + 1}{n^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$f(a) = 0 \text{ και } f(f(x)) = xf(x) + a, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0 .$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με $\hat{A} = 36^\circ$. Ο κύκλος C_1 ($\Gamma, \Gamma A$) (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι η AE είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} και ότι η $\Delta\Gamma$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες