ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός; **Μονάδες 2,5**

β) Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου , $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ δεδομένο διάνυσμα και $M'(x', y')$ η εικόνα του M στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$, να βρείτε τα x', y' συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M και του διανύσματος $\vec{u}$. **Μονάδες 5**

γ) Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός ; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **Μονάδες 5**

Β. 1. Να γράψετε στο τετράδιο σας το μετασχηματισμό της **Στήλης Ι** και δίπλα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στον πίνακα μετασχηματισμού.

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
T_1 : " συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ "	1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
T_2 : " στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ "	2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 3

Β. 2. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό T με πίνακα $A = A_1 \cdot A_2 - A_2 \cdot A_1$, όπου A_1, A_2 οι πίνακες των μετασχηματισμών T_1, T_2 αντιστοίχως , του ερωτήματος **Β.1**.

α) Να δείξετε ότι ο T είναι κανονικός μετασχηματισμός. **Μονάδες 4,5**

β) Να βρείτε την εικόνα της ευθείας $(\varepsilon): 2x - y + 5 = 0$ μέσω του μετασχηματισμού T . **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{5+i}{2+3i}$.

α) Να γράψετε τον z στην μορφή $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \Re$. **Μονάδες 4**

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή . **Μονάδες 5**

Στις ερωτήσεις γ) , δ) να γράψετε στο τετράδιο σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση .

γ) Αν $\theta = Argz$, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

Α: $\dfrac{\pi}{4} - \theta$ ***Β:*** $\dfrac{\pi}{2} + \theta$ ***Γ:*** $\theta - \dfrac{\pi}{2}$ ***Δ:*** $\pi + \theta$ **Μονάδες 3**

δ) Το z^4 είναι ίσο με :

Α: 4 ***Β:*** 4i ***Γ:*** –4i ***Δ:*** –4 **Μονάδες 3**

Β. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

$\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & , \quad 0<x<5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\cdot\ln(x-5+e)+2\cdot(\alpha+1)\cdot e^{5-x} & , \quad x\geq 5 \end{cases}$.

Α. Να βρεθούν τα: $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ **Μονάδες 6**

Β. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\Re$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=5$. **Μονάδες 10**

Γ. Για τις τιμές των α,β του ερωτήματος **Β** να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγηση του, όπου $t\geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\dfrac{8}{t+1}-2$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$. **Μονάδες 6**

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωση του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη; **Μονάδες 6**

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t=8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό , ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t=10$ η επίδραση του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.
(Δίνεται $\ln 11\cong 2,4$) . **Μονάδες 13**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. **Μονάδες 4**

Α. 2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 8,5**

Β. 1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Α: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

Β: Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Γ: Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.

Μονάδες 4,5

Β. 2. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α Συναρτήσεις	**Στήλη Β** Εφαπτομένες
α. $f(x)=3x^3, \quad x_0=1$	***1.*** $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=\eta\mu 2x, \quad x_0=\frac{\pi}{2}$	***2.*** $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\|x\|, \quad x_0=0$	***3.*** $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4$	***4.*** $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{2z+i}{z-2\cdot i}$, $z\in C$ με $z\neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών :

$w_1=f(9-5i)$ **Μονάδες 6**

$w_2=\left[\frac{\sqrt{2}}{3}f(9-5i)\right]^{2004}$ **Μονάδες 6**

β) Θεωρούμε τον πίνακα $M=\frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix}|w_1| & 0\\ 0 & -|w_1|\end{bmatrix}$ όπου $|w_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος **α.**

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι:

Α: στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$

Β: συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$

Γ: συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$

Δ: συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$

Ε: ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Μονάδες 5

γ) Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος **β**, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει: $M \cdot X = K$ όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$. **Μονάδες 8**

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.
Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι :

α) η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.
Μονάδες 7

β) υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$ **Μονάδες 12**

γ) υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$ **Μονάδες 6**

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{\alpha t}{1 + \left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, $t \geq 0$ όπου ***α*** και ***β*** είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β. **Μονάδες 15**

β) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. **Μονάδες 10**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι : $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **Μονάδες 7,5**

Α. 2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει :

α) $|z|^2 = z\bar{z}$

β) $|z^2| = z^2$

γ) $|z| = -|\bar{z}|$

δ) $|z| = |\bar{z}|$

ε) $|i\bar{z}| = |z|$. **Μονάδες 5**

Β. 1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιο σας τους αριθμούς της ***στήλης Α*** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της ***στήλης Β*** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α		***Στήλη Β***	
1.	$|z_1 \cdot z_2|$	***α.***	4
2.	$|z_1^2|$	***β.***	2
3.	$|z_2|^2$	***γ.***	25
4.	$-|\bar{z_1}|$	***δ.***	-5
5.	$|iz_2|$	***ε.***	-2
		στ.	5
		ζ.	10

Μονάδες 7,5

Β. 2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & , \quad x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x - 3} & , \quad x > 3 \end{cases}$

α) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1/9$ **Μονάδες 9**

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο σημείο $A(4, f(4))$. **Μονάδες 7**

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$, ισχύει ότι:
$f^3(x)+\beta\cdot f^2(x)+\gamma\cdot f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\Re$, όπου β,γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. **Μονάδες 10**

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 8**

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

i) $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$.

ii) $f(x)=1-2x^2\int_0^1 t\cdot f^2(x\cdot t)dt$, για κάθε $x\in\Re$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x^2$, για κάθε $x\in\Re$.

α) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2xf^2(x)$ (όπου $f'(x)$ είναι παράγωγος της συνάρτησης f).
Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. **Μονάδες 4**

γ) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ **Μονάδες 4**

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot f(x)\cdot \eta\mu 2x\right)$. **Μονάδες 7**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $\left[\alpha,\beta\right]$, τότε να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$. **Μονάδες 12**

Β. 1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει: $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$. **Μονάδες 8**

Β. 2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και συνεχής στο $\left(\alpha,\beta\right]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $\left[\alpha,\beta\right]$ μία μέγιστη τιμή. **Μονάδες 1**

β) Κάθε συνάρτηση, που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. **Μονάδες 1**

γ) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_o και $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. **Μονάδες 1**

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, τότε $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$. **Μονάδες 1**

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o. **Μονάδες 1**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu}z, \quad \nu \in IN^*$.

α) Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$. **Μονάδες 7**

β) Αν $\left|z\right| = \rho$ και $Arg(z) = \theta$, να δείξετε ότι : $f(13) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$. **Μονάδες 8**

γ) Αν $\left|z\right| = 2$ και $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και $f(13)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\Re$.
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f o g$ είναι $1-1$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι $1-1$ **Μονάδες 7**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. **Μονάδες 18**

ΘΕΜΑ 4ο

α) Έστω δυο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι αν $h(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$. **Μονάδες 2**

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1, \quad x\in\Re \quad \text{και} \quad f(0)=0.$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f. **Μονάδες 5**

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$, για κάθε $x>0$. **Μονάδες 12**

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=0, x=1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{4}<E<\frac{1}{2}f(1).$$ **Μονάδες 6**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 8**

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; **Μονάδες 7**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|=|\overline{z}|=|-z|$. **Μονάδες 2**

β) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ. **Μονάδες 2**

γ) Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx = f(x)+c$, $c\in\Re$.

Μονάδες 2

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. **Μονάδες 2**

ε) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_o.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\Re$ και $w=3z-i\overline{z}+4$, όπου $\overline{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α) Να αποδείξετε ότι: $Re(w)=3\alpha-\beta+4$ $Im(w)=3\beta-\alpha$. **Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$. **Μονάδες 9**

γ) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. **Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in\Re$. **Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}. **Μονάδες 5**

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β). **Μονάδες 8**

β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$. **Μονάδες 9**

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 8**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους. **Μονάδες 2**

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$. **Μονάδες 2**

γ) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g'(x_0)$. **Μονάδες 2**

δ) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. **Μονάδες 2**

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$ **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\cdot\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. **Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x\cdot f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\Re$ και $f(0)=f(\frac{3}{2})=0$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(0,\frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$. **Μονάδες 8**

β) Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)dx$, $\alpha\in\Re$. **Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x\in\Re$, ισχύει

$g(x)=\int_1^{x^3}|z|\cdot f(t)dt-3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot(x-1)\geq 0$, όπου $z=\alpha+\beta i\in C$, με $\alpha,\beta\in\Re^*$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και να βρείτε τη g'. **Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$ **Μονάδες 8**

γ) Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $Re(z^2)=-\frac{1}{2}$. **Μονάδες 6**

δ) Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,\ 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. **Μονάδες 6**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o)=\eta$. **Μονάδες 9**

Α.2 Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; **Μονάδες 4**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$. **Μονάδες 2**

β. Αν υπάρχει το, $\lim_{x\to x_o}(f(x)+g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_o}f(x)$ και $\lim_{x\to x_o}g(x)$. **Μονάδες 2**

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y=x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}. **Μονάδες 2**

δ. Αν $\lim_{x\to x_o}f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_o ,τότε $\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ **Μονάδες 2**

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει

$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x)-f(\alpha)$ για κάθε $x\in\Delta$. **Μονάδες 2**

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με l $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1}=\frac{9}{z_1}$ **Μονάδες 7**

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός . **Μονάδες 9**

γ. Δείξτε ότι: $|z_1+z_2+z_3|=\frac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα . **Μονάδες 3**

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y=\lambda\cdot e\cdot x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. **Μονάδες 7**

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y , είναι $E(\lambda)=\dfrac{e-2}{2\lambda}$ **Μονάδες 8**

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$ **Μονάδες 6**

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$ **Μονάδες 6**

γ. Δίνονται οι συναρτήσεις: $h(x)=\int_{-x}^{x}t^{2005}\cdot f(t)dt$ και $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$.

Να δείξετε ότι $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 7**

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x}t^{2005}\cdot f(t)dt=\dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$. **Μονάδες 6**