ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία σελ. 214

Α2. Θεωρία σελ. 217

Β1. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό

Β2. $\alpha \to 3$, $\beta \to 1$, $\gamma \to 5$, $\delta \to 2$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Ο w_1 είναι: $w_1 = f(9-5i) = \frac{2(9-5i)+i}{9+5i-2i} = \frac{18-9i}{9+3i} = \frac{3(6-3i)}{3(3+i)} = \frac{(6-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{15-15i}{10} =$

$= \frac{3}{2}(1-i) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} + i\eta\mu\frac{7\pi}{4}\right)$.

Ο w_2 είναι: $w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i)\right]^{2004} \underset{=\!=}{(\alpha)} \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} + i\eta\mu\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{2004} =$

$= \left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} + i\eta\mu\frac{7\pi}{4}\right)^{2004} = \sigma\upsilon\nu\frac{2004\cdot 7\pi}{4} + i\eta\mu\frac{2004\cdot 7\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu(3507\pi) + i\eta\mu(3507\pi) =$

$= \sigma\upsilon\nu(3506\pi + \pi) + i\eta\mu(3506\pi + \pi) = \sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi$

β) Το $|w_1|$ από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, οπότε ο πίνακας Μ είναι:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση είναι το Β

γ) Ο πίνακας Μ του ερωτήματος (β) είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, έτσι $|M|=-1\neq 0$, οπότε ο Μ αντιστρέφεται με: $M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας Κ που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$ είναι:

$$K = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} & -\eta\mu\frac{\pi}{2} \\ \eta\mu\frac{\pi}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι η εξίσωση ΜΧ=Κ έχει ως μοναδική λύση της τον πίνακα:

$$X = M^{-1} \cdot K \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 3$. Πράγματι η f είναι συνεχής στο [0,1], ως παραγωγίσιμη σ΄ αυτό και αφού f(0)=2<3<4=f(1), από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών έπεται ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 3$. Επίσης , η συνεχής f στο [0,1] έχει f΄(x)>0 για κάθε $x \in (0,1)$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1], συνεπώς ο x_0 είναι μοναδικός.

β) Έχουμε $0 < \frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < 1$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1], ισχύουν οι ανισότητες :

$$f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1) \quad , \quad f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1) \quad , \quad f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1) \quad , \quad f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$$

και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε :

$$4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$ και

αφού η f είναι συνεχής στο [0,1] , από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, έχουμε ότι υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Η f είναι συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) (ως παραγωγίσιμη στο [0,1]), έτσι από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε : $f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_2) = \frac{4 - 2}{1} \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$, δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000.

ΘΕΜΑ 4ο

Έχουμε $f(t) = \dfrac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2} \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{\alpha t}{1 + \frac{t^2}{\beta^2}} \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{\alpha t}{\frac{\beta^2 + t^2}{\beta^2}} \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{\alpha \beta^2 t}{\beta^2 + t^2}, \ t \geq 0$

με α και β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί .

α. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(t)=\dfrac{\alpha\beta^2(\beta^2+t^2)-\alpha\beta^2 t2t}{(\beta^2+t^2)^2} \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{\alpha\beta^2(\beta^2+t^2-2t^2)}{(\beta^2+t^2)^2} \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{\alpha\beta^2(\beta^2-t^2)}{(\beta^2+t^2)^2}$

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$, παρουσιάζει ακρότατο (μέγιστη τιμή της f) στο εσωτερικό σημείο, $t_0=6$ του $[0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, συνεπώς από το Θεώρημα Fermat έπεται ότι :

$$f'(6)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta^2(\beta^2-6^2)}{(\beta^2+6^2)^2}=0 \Leftrightarrow \alpha\beta^2(\beta^2-6^2)=0 \Leftrightarrow \beta^2=6^2 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=6\ .$$

Από την υπόθεση η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, οπότε

$$f(6)=15 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta^2 6}{\beta^2+6^2}=15 \overset{\beta=6}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha 6^2 6}{6^2+6^2}=15 \Leftrightarrow \frac{\alpha 6^2 6}{2\cdot 6^2}=15 \Leftrightarrow 3\alpha=15 \Leftrightarrow \alpha=5$$

β. Για α=5 και β=6 η f(t) γίνεται : $f(t)=\dfrac{180t}{36+t^2},\ t\geq 0$.

Για να είναι η τιμή της συγκέντρωσης τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες , θα πρέπει :

$$f(t)\geq 12 \Leftrightarrow \frac{180t}{36+t^2}\geq 12 \Leftrightarrow 12(36+t^2)\leq 180t \Leftrightarrow 36+t^2\leq 12t \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t^2-12t+36\leq 0 \Leftrightarrow 3\leq t\leq 12$, δηλαδή το φάρμακο δρα αποτελεσματικά στο χρονικό διάστημα [3,12].