

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Θεωρία σελ. 98

A.2. α. Σωστό β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Σωστό

B.1. 1→ζ 2→γ 3→α 4→δ 5→β

B.2. $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αφού η f είναι συνεχής (άρα και στο $x_0=3$), θα ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3), \text{ έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\alpha x^2) = 9\alpha \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1 - e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-e^{x-3}(x-3)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-e^{x-3}) = -1 \text{ και}$$

$$f(3) = 9\alpha. \text{ Άρα : } 9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}.$$

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$ είναι : $y - f(4) = f'(4)(x - 4)$ (ε)

$$\text{Έχουμε : } f(4) = \frac{1 - e^{4-3}}{4-3} = 1 - e$$

$$\text{Για } x > 3 \text{ έχουμε : } f(x) = \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, \text{ οπότε :}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{x-3}(x-3) - (1 - e^{x-3})}{(x-3)^2} = \frac{-xe^{x-3} + 3e^{x-3} - 1 + e^{x-3}}{(x-3)^2} = \frac{4e^{x-3} - xe^{x-3} - 1}{(x-3)^2}, \text{ άρα}$$

$$f'(4) = \frac{4e - 4e - 1}{(4-3)^2} = -1, \text{ οπότε :}$$

$$(ε) : y - (1 - e) = -1 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y - 1 + e = -x + 4 \Leftrightarrow y = -x + 5 - e$$

γ. Επειδή δεν διευκρινίζεται αν θέλει το εμβαδόν για $\alpha = -\frac{1}{9}$ ή για κάθε τιμή του α , έχουμε :

• Αν $\alpha = -\frac{1}{9}$ τότε $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 < 0$, οπότε :

$$E = -\frac{1}{9} \int_1^2 -x^2 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{17}{9 \cdot 3} = \frac{7}{27} \text{ τ.μ.}$$

• Για κάθε τιμή του α , έχουμε :

α) Αν $a=0$ δεν υπολογίζουμε το εμβαδόν αφού $f(x)=0$ στο $[1,2]$

β) Αν $a \neq 0$ τότε $E = |a| \int_1^2 x^2 dx = |a| \frac{7}{3}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 3ο

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) = 3x^2 - 4x + 6 \quad (1)$$

Θέτουμε $f(x) = y$, οπότε θεωρώντας τη συνάρτηση $g(y) = 3y^2 + 2\beta y + \gamma$ η $\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$ από υπόθεση. Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ $g(y) > 0$ και επειδή $3x^2 - 4x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta' = 16 - 72 = -56 < 0$, από την (1) συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε :

α. Η f δεν έχει ακρότατα αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (από Θ. Fermat)

β. Και η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη.

• Για $x = 0$ η δοσμένη σχέση γίνεται :

$$f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1 \Leftrightarrow f(0) \cdot [f^2(0) + \beta f(0) + \gamma] = -1.$$

Επειδή $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$ ($\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$ αφού $\beta^2 < 3\gamma$), άρα $f(0) < 0$

• Όμοια για $x = 1$ η δοσμένη σχέση γίνεται :

$$f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1) \cdot [f^2(1) + \beta f(1) + \gamma] = 4.$$

Επειδή $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$ ($\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$ αφού $\beta^2 < 3\gamma$), άρα $f(1) > 0$

Οπότε $f(0) \cdot f(1) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. Επίσης επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα και στο $(0,1)$ η f είναι "1-1" άρα η ρίζα είναι μοναδική στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θέτουμε $u = xt$, οπότε : $du = x \cdot dt$ και $u_1 = x \cdot 0 = 0$, $u_2 = x \cdot 1 = x$, οπότε:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^1 x^2 t f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^x t f^2(xt) x dt = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du$$

οπότε : $f'(x) = \left(1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du \right)' = -2x f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με :

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - x^2 \right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή, σύμφωνα με πόρισμα του Θ.Μ.Τ.

γ. Από το (α) ερώτημα έχουμε : $f''(x) = -2xf^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f''(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = 2x$

άρα $\int \left(\frac{1}{f(x)}\right)' dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + c}$

Όμως $f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{0^2 + c} = 1 \Leftrightarrow c = 1$, επομένως $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) \eta\mu 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{1}{1+x^2} \eta\mu 2x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x\right)$

Όμως $\left|\frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x\right| \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right|$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\right) = 0$ από το κριτήριο

παρεμβολής έχουμε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x\right) = 0$