

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 2

γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 2

ε. Ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx \text{ όπου } f', g' \text{ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο } [\alpha, \beta].$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$

Μονάδες 9

ii. $|z_1-z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 8

A.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A.3 Πότε η ευθεία $y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx > 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε

$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+ai}{a+2i}$ με $a \in \mathbb{R}$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2+ai}{a+2i}$ για $a=0$ και $a=2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$ για κάθε φυσικό αριθμό ν .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in R$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, x \in Z$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)),$ και $\Gamma(x_3, f(x_3)),$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt, x \in [0,1]$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt, x \in [0,1]$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5}$

Μονάδες 7

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει :

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} .$$

Μονάδες 10

A.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει :

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \text{ και } f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A) .$$

Μονάδες 2

β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ) Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Μονάδες 2

ε) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx .$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6$ και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$ τότε να

βρείτε :

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

β) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

γ) την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

δ) την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 .

Μονάδες 3

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α .

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

Μονάδες 8

β) Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}.$$

Μονάδες 4

γ) Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \quad \text{και} \quad g(0) = g'(0) = 1, \quad \text{τότε :}$$

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1.

Μονάδες 3

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . **Μονάδες 10**
- B.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. **Μονάδες 2**
- β.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. **Μονάδες 2**
- γ.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ **Μονάδες 2**
- δ.** Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **Μονάδες 2**
- ε.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2^ο

- Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- A .α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 9**
- β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. **Μονάδες 8**
- B.** Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$ όπου ο μιγαδικός αριθμός z_0 που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$ όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 8

B. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή,

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$,

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt, \quad x \in [0, 2], \quad G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2.$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt.$$

Μονάδες 7

ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
 είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

δ) $(\sin x)' = \eta \mu x, \quad x \in \mathbb{R}.$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$.

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος B3, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2-3x+2)=\ln \left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1} \right]$.

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi\psi$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 xf(x)dx$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x \quad f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7