



Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου 2008

ΘΕΜΑ 1^ο

Α.1 Θεωρία σελ. 235

Α.2 Θεωρία σελ. 191

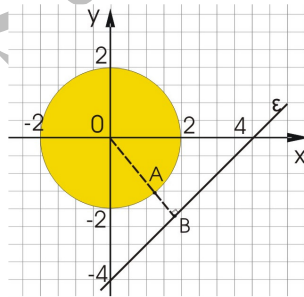
Β. $\alpha \rightarrow \Sigma$ $\beta \rightarrow \Sigma$ $\gamma \rightarrow \Lambda$ $\delta \rightarrow \Lambda$ $\epsilon \rightarrow \Sigma$ **ΘΕΜΑ 2^ο**

α. $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \Leftrightarrow |2\sqrt{2} + i||z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$, άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 2$.

β. Έστω $M(x, y)$ εικόνα του w τότε: $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x + yi - 1 + i| = |x + yi - 3 + 3i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x - y - 4 = 0$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y - 4 = 0$.

γ. $|w|_{\min} = (OB) = d(O, \epsilon) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

δ. $|z - w|_{\min} = |d(O, \epsilon) - \rho| = 2\sqrt{2} - 2$.



ΘΕΜΑ 3^ο

α. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)^{\text{dH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

και $f(0) = 0$ επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + 1$

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ επομένως

$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ επομένως

$f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$. Δηλαδή $f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$,

οπότε $f([0, +\infty)) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

x	0	1/e	+∞	
f'	=	-	0	+
f	=	↘	↗	
	0	-1/e	+∞	

γ. $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0, x > 0$.

x	0	1/e	+∞	
g'	=	-	0	+
g	=	↘	↗	
	-α	-α-1/e	+∞	

- Αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$, τότε η εξίσωση 2 ρίζες, στα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ και $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
- Αν $\alpha > 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
- Αν $\alpha = 0$, τότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (αφού $x \neq 0$).
- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την $x = \frac{1}{e}$.

δ. Για κάθε $x > 0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα

$[x, x+1]$, επομένως υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$ αλλά

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, επομένως f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε:

$\xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Έστω $k = \int_0^2 f(t)dt$, τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$

$$\text{Άρα } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 [(10x^3 + 3x)k - 45]dx \Leftrightarrow k = k \left[\frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 - 45[x]_0^2 = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 46k - 90 = k \Leftrightarrow k = 2.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 20x^3 + 6x - 45.$$

β. Για το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$ θέτω $-h = u$, τότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} \stackrel{\text{2ος ορισμός}}{=} g''(x).$$

γ. i.

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} &= \left(\frac{0}{0} \right)^{\text{d'H}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) + g'(x) - g'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{2h} \stackrel{\text{από(β)}}{=} \\ &= \frac{1}{2}g''(x) + \frac{1}{2}g''(x) = g''(x) \end{aligned} \right.$$

Άρα $g''(x) = f(x) + 45 \Leftrightarrow (g'(x))' = (5x^4 + 3x^2)'$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c$ και επειδή $g'(0) = 1$, τότε $c = 1$, δηλαδή $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ οπότε $g'(x) = (x^5 + x^3 + x)'$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = x^5 + x^3 + x + c$ και επειδή $g(0) = 1$, τότε $c = 1$, δηλαδή $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

ii. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} επομένως και 1 - 1.