Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου 2009

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. σχολικό βιβλίο σελίδα 251
Α.2. σχολικό βιβλίο σελίδα 213
Β. α. $\to$ **Σ** **β.** $\to$ **Σ** **γ.** $\to$ **Λ** **δ.** $\to$ **Λ** **ε.** $\to$ **Λ**

ΘΕΜΑ 2ο

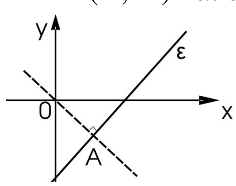
Α.α) Αν $z = x + yi$ τότε $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{x-1}{2} \\ \lambda = \dfrac{y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} \Rightarrow y = x - 2$ Άρα οι εικόνες των εικόνων του z ανήκουν στην ευθεία $y = x - 2$.

β) (1ος τρόπος)

Το ελάχιστο μέτρο θα το έχει ο μιγαδικός του οποίου η εικόνα είναι το σημείο τομής Α της $\varepsilon : y = x - 2$ και της κάθετης της που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Φέρνουμε την ευθεία $OA \perp \varepsilon$, $\lambda_{OA} = -\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon} = \dfrac{-1}{1} = -1$ και αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι η $y = -x$.Λύνοντας το σύστημα $(\Sigma)\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$**,** οπότε

Α(1 , -1) και ο μιγαδικός που έχει το μικρότερο μέτρο είναι ο $z_0 = 1 - i$.



(2ος τρόπος) Έχουμε $|z| = \sqrt{(2\lambda+1)^2 + (2\lambda-1)^2} = \sqrt{8\lambda^2 + 2}$. Αρκεί να γίνει ελάχιστη η παράσταση $8\lambda^2 + 2$ η οποία σαν τριώνυμο έχει ελάχιστο για $\lambda = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{0}{-16} = 0$, (είτε με παραγώγους) δίνει λ=0 οπότε ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z_0 = (2.0 + 1) + (2.0 - 1)i = 1 - i$.

Β. Θέτω $w = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$

$(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 12) - \beta i = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha = 13 \\ 1 - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -4 \end{cases}$

Επομένως $w = 3 + i$ ή $w = -4 + i$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έχουμε $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$ στο $(-1,+\infty)$, και ισχύει $f(x)\geq 1$

παρατηρούμε ότι $f(0)=1$ και αφού $f(x)\geq f(0)$ στο $(-1,+\infty)$

για x=0 έχουμε ελάχιστο , το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $(1,+\infty)$ *,η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .*

Από Θ. Fermat $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=e$.

Διότι $f'(x)=[\alpha^x-\ln(x+1)]'=\alpha^x\ln\alpha-\dfrac{1}{x+1}$ $,x>-1$**.**

Β.α) Για $\alpha=e$ είναι $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$ και $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

β) Αφού f' γνησίως αύξουσα και $f'(0)=0$ το 0 θα είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$

$x>0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$ **,**αντίστοιχα εργαζόμαστε και στο $(-1,0)$

x	1		0	+∞
f΄	‖	−	0	+
f	‖	↘		↗

* Παρατηρούμε ότι όταν $x\neq 0\Rightarrow f(x)\neq f(0)\Rightarrow f(x)\neq 1$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)[f(\beta)-1]+(x-1)[f(\gamma)-1]$ στο $[1,2]$.

- Η g είναι συνεχής στο [1 , 2] ως πολυωνυμική .
- $\begin{matrix} g(1)=1-f(\beta)<0 \\ g(2)=f(\gamma)-1>0 \end{matrix}$ (διότι $f(x)\geq 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0)

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1\ ,\ 2)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi)=0\Leftrightarrow(\xi-2)[f(\beta)-1]+[f(\gamma)-1]=0\overset{1<\xi<2}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{(\xi-2)[f(\beta)-1]}{(\xi-1)(\xi-2)}+\frac{(\xi-1)[f(\gamma)-1]}{(\xi-1)(\xi-2)}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\beta)-1}{\xi-1}+\frac{f(\gamma)-1}{\xi-2}=0$$

άρα η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1 , 2) .

ΘΕΜΑ 4ο

α.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση F , με $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Η f είναι συνεχής στο [0 , 2] , άρα η F είναι παραγωγίσιμη στο [0 , 2] με $F'(x)=f(x)$.
- Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση f_1 με $f_1(x)=x\cdot f(x)$. Η f_1 είναι συνεχής στο [0 ,2] ως γινόμενο συνεχών , άρα η H είναι παραγωγίσιμη στο [0 , 2] με $H'(x)=x\cdot f(x)$.

  ➢ Η συνάρτηση G , με $G(x)=\dfrac{H(x)}{x}-F(x)+3$ είναι συνεχής στο (0 , 2] ως πράξεις συνεχών (πηλίκο-άθροισμα – ολοκλήρωμα συνεχούς) **(1)** .

  ➢ στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^+}G(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{H(x)}{x}-F(x)+3\right]=$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{H(x)}{x}-\lim_{x\to0^+}(F(x)+3)=$$
$$=0-F(0)+3=3 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x t\cdot f(t)dt}{x}\underset{\text{L'Hospital}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot f(x)}{1}=0\cdot f(0)=0$$

$$G(0)=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\lim_{x\to0}\frac{6(1-\sqrt{1-t^2})(1+\sqrt{1-t^2})}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=\lim_{x\to0}\frac{6}{1+\sqrt{1-t^2}}=3 \qquad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε $\lim\limits_{x\to o^+}G(x)=G(0)$, άρα η G είναι συνεχής στο $x_0=0$ **(4)** . Από (1) και (4) προκύπτει ότι **η G είναι συνεχής στο [0 , 2]** .

β. Για x ∈ (0 , 2) η G είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων

$$G'(x)=\left[\frac{H(x)}{x}-F(x)+3\right]'=\left[\frac{H(x)}{x}\right]'-F'(x)$$
$$=\left[\frac{H(x)}{x}\right]'-F'(x)=\frac{H'(x)x-H(x)}{x^2}-f(x)$$
$$=\frac{x^2f(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=f(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=-\frac{H(x)}{x^2}.$$

γ. (1ος τρόπος)

Θα εφαρμόσουμε Θ. Rolle για την G στο [0,2]

- η G είναι συνεχής στο [0 , 2]
- η G είναι παραγωγίσιμη στο (0 , 2) με $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}$
- $\begin{cases} G(0)=3 \\ G(2)=\dfrac{H(2)}{2}-F(2)+3=3 \end{cases}$, διότι $\int_0^2(t-2)f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_0^2[t\cdot f(t)-2f(t)]dt=0\Leftrightarrow$ $\int_0^2 t\cdot f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt=0\Leftrightarrow\dfrac{H(2)}{2}-F(2)=0$

  από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον α ∈ (0 , 2) ώστε $G'(\alpha)=0\Leftrightarrow-\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow H(\alpha)=0$.

(2ος τρόπος)

Με άτοπο: Αν $H'(x) \neq 0 \Leftrightarrow G'(x) \neq 0$ στο $(0,2)$ και αφού η G' είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$, οπότε η G θα είναι γνησίως μονότονη στο $[0,2]$.

Έχουμε $0 < 2 \Rightarrow \begin{cases} G(0) < G(2) \\ \text{ή} \\ G(0) > G(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < 3 \\ \text{ή} \\ 3 > 3 \end{cases}$

Οπότε είτε είναι αύξουσα είτε φθίνουσα καταλήγουμε σε άτοπο.

δ. Θα εφαρμόσουμε Θ. Μ.Τ. για την G στο $[0,2]$

- η G είναι συνεχής στο $[0 , \alpha]$
- η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0 , \alpha)$ με $G'(x) = -\dfrac{H(x)}{x^2}$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0 , \alpha)$, τέτοιο ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha-0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\dfrac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} \underset{H(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} -\frac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)dt.$$