Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2010

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 304.
Α.2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 279.
Α.3 Σχολικό Βιβλίο σελ. 273.
Α.4. α. $\to$ **Σ** **β.** $\to$ **Σ** **γ.** $\to$ **Λ** **δ.** $\to$ **Λ** **ε.** $\to$ **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β.1. $z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$, $\Delta=4-8=-4$, $z_{1,2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$.

Β.2.

$z_1^{\ 2010}+z_2^{\ 2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left((1+i)^2\right)^{1005}+\left((1-i)^2\right)^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$.

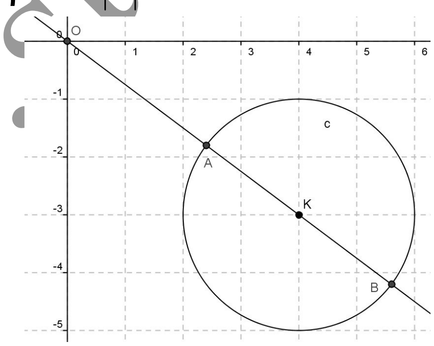
Β.3.

$|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |z-4+3i|=|(1+i)-(1-i)| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|2i| \Leftrightarrow |w-4+3i|=2 \Leftrightarrow |w-(4-3i)|=2.$

Είναι κύκλος $K(4,-3)$ και $\rho=2$

Β.4.

α΄ τρόπος: $|w|_{max}=(OB)=(OK)+R=5+2=7$, $|w|_{min}=(OA)=(OK)-R=5-2=3$ **,** και ισχύει $(OK)=\sqrt{(4-0)+(-3)^2}=5$. **Άρα** $3\le|w|\le 7$ **.**



β΄ τρόπος: $|w|=|(w-4+3i)+(4-3i)|$

Είναι $\big||w-4+3i|-|4-3i|\big|\le|w|\le|w-4+3i|+|4-3i| \Leftrightarrow |2-5|\le|w|\le|2+5| \Leftrightarrow 3\le|w|\le 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} > 0$ διότι $2x^2+2x+2>0\ \forall x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta = -12 < 0$. Άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ.2. $2(x^2-3x+2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow 2x^2-6x+4 = \ln[(3x-2)^2+1] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1) =$

$= 6x-4+\ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1) = 2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x-2)$

$x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ άρα $x=1$ ή $x=2$ και αφού f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και “1-1”.

Γ.3. $f''(x) = \frac{(4x+2)(x^2+1)-2x(2x^2+2x+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$ και $f''(x)=0 \Leftrightarrow x \pm 1$

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f΄΄	−	0	+	0	−
f	$\frown$		$\smile$		$\frown$
		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή στο $[-1,1]$ και κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$ Έχει σημεία καμπής τα $A(1, 2+\ell n2)$ και $B(-1, -2+\ell n2)$.

Εφαπτομένη στο A: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ ή $y-(2+\ln 2) = 3(x-1)$ ή $y = 3x-1+\ln 2$

στο B: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$ ή $y-(-2+\ln 2) = 1\cdot(x+1)$ ή $y = x-1+\ln 2$

Και από το σύστημα $\begin{cases} y = 3x-1+\ln 2 \\ y = x-1+\ln 2 \end{cases}$ προκύπτει σημείο τομής $K(0, -1+\ln 2)$ που ανήκει στον y΄y.

Γ.4.

***<u>α΄ τρόπος</u>*:**

$I = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} x(2x+\ln(x^2+1))dx = \int_{-1}^{1}(2x^2+x\ln(x^2+1))dx = \int_{-1}^{1}2x^2dx + \int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx = *$

$= \int_{-1}^{1}2x^2dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)'\ln(x^2+1)dx = \left(\frac{2x^3}{3}\right)_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left\{[(x^2+1)\ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\cancel{(x^2+1)}\frac{2x}{\cancel{x^2+1}}dx\right\} = ... = \frac{4}{3}.$

***<u>β΄ τρόπος</u>*:**

$* = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)'\cdot\ln(x^2+1)dx = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}[(x^2+1)'\cdot\ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\cdot[\ln(x^2+1)]'dx =$

$= \frac{4}{3} + 0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{2x}{\cancel{x^2+1}}dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^{1}xdx = \frac{4}{3} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} - 0 + 0 = \frac{4}{3}.$

γ***<u>΄ τρόπος</u>*:**

$* = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2)'\cdot\ln(x^2+1)dx = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}[x^2\cdot\ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cdot[\ln(x^2+1)]'dx = \frac{4}{3} + 0 - \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx$

$= \frac{4}{3} - \int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x^2+1}dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^{1}\frac{x^3+x-x}{x^2+1}dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^{1}\left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^{1}xdx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx =$

$= \frac{4}{3} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} - 0 + 0 = \frac{4}{3}.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις g_1, g_2 με $g_1(x)=\dfrac{x}{f(x)-x}$ και $g_2(x)=\int_0^x g_1(t)dt$. Η g_1 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις συνεχών. Άρα η g_2 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g_2'(x)=g_1(x)=\dfrac{x}{f(x)-x}$.

Η συνάρτηση f, με $f(x)=x+3+g_2(x)=x+3+\int_0^x \dfrac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f'(x)=[x+3+g_2(x)]'=1+g_2'(x)=1+\dfrac{x}{f(x)-x}=\dfrac{f(x)-x+x}{f(x)-x}=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$.

Δ.2. $g'(x)=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=2f'(x)(f(x)-x)-2f(x)=2\cdot\dfrac{f(x)}{\cancel{f(x)-x}}\cancel{(f(x)-x)}-2f(x)=0$

Αφού $g'(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ τότε η $g(x)=c$ στο $\mathbb{R}$.

Δ.3. $g(x)=f^2(x)-2xf(x)=c$ και $g(0)=f^2(0)-0=3^2=9$

Άρα $f^2(x)-2xf(x)=9 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+9$ και θέτουμε $h(x)=f(x)-x$ που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $[h(x)]^2>0$, άρα $h(x)\neq 0$ και λόγω συνέχειας θα διατηρεί πρόσημο, και αφού h(0)=3>0 τότε $h(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Τελικά $[h(x)]^2=x^2+9 \Leftrightarrow h(x)=\sqrt{x^2+9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ή $h(x)=-\sqrt{x^2+9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ όμως δεκτή μόνο η $h(x)=\sqrt{x^2+9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, όποτε $f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ.4. Έστω G μια αρχική της f. Τότε η ζητούμενη ανισότητα γίνεται $G(x+1)-G(x)<G(x+2)-G(x+1)$. Για τη $G(u)=\int_\alpha^u f(t)dt$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα [x,x+1], [x+1,x+2] όποτε υπάρχουν $\xi_1\in(x,x+1)$ με $G'(\xi_1)=\dfrac{G(x+1)-G(x)}{x+1-x}=G(x+1)-G(x)$ και $\xi_2\in(x+1,x+2)$ με $G'(\xi_2)=\dfrac{G(x+2)-G(x+1)}{(x+2)-(x+1)}=G(x+2)-G(x+1)$. Όποτε **αρκεί** να δείξουμε ότι $G'(\xi_1)<G'(\xi_2)$ δηλαδή ότι η G' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε $G'(x)=f(x)$ & $G''(x)=f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>0$, άρα η G' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(αφού $\sqrt{x^2+9}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$)

ή με άλλον τρόπο $\sqrt{x^2+9}>-x \Leftrightarrow \begin{cases} \text{αν } x\geq 0 \text{ ισχύει } \forall x\geq 0 \\ \text{αν } x<0,\ \sqrt{x^2+9}^2>(-x)^2 \Leftrightarrow 9>0, \text{ που ισχύει.} \end{cases}$

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας