



Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2011

ΘΕΜΑ Α

A.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 260 (Θεώρημα Fermat).

A.2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 280.

A.3 α. → Σ β. → Σ γ. → Λ δ. → Λ ε. → Σ

ΘΕΜΑ Β

B.1. Παρατηρούμε ότι $|z-3i| = |\overline{z-3i}| = |\bar{z}+3i|$

Άρα, $|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \Leftrightarrow 2|z-3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| = 1 \Leftrightarrow |z-(0+3i)| = 1$

Επομένως, οι εικόνες του μιγαδικού z κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B.2. Είναι:

$$|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i = \frac{1}{z-3i}$$

B.3. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z-3i}$, έχουμε: $w = z - 3i + \frac{1}{z-3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2x \in \mathbb{R}$

Επίσης $w = z - 3i + \frac{1}{z-3i}$ και $|w| = |z - 3i + \frac{1}{z-3i}| \leq |z - 3i| + |\frac{1}{z-3i}| = 1 + 1 = 2$.

Και αφού $w \in \mathbb{R}$, $|w| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$.

B.4.

$$|z-w| = |x+yi-2x| = |-x+yi| = \sqrt{x^2+y^2} = |z|.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$[e^x f'(x) - e^x]' = [xf'(x)]'$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$[e^x f'(x) - e^x] = [xf'(x)] + c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει $c = -1$

Άρα $[e^x f'(x) - e^x] = [xf'(x)] - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (1)

Πρέπει ν.δ.ο. $e^x - x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $t(x) = e^x - x$, στο \mathbb{R} , με $t'(x) = e^x - 1$, στο \mathbb{R}

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'	-	0	+
t	↘		↗

και $t(x) \geq t(0) = 1$.

Άρα διαιρώντας με $e^x - x$ η σχέση (1) δίνει: $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = (\ln(e^x - x))'$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα υπάρχει σταθερά $c' \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x) = \ln(e^x - x) + c' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει $f(0) = \ln(e^0 - 0) + c' \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c' = 0$

Άρα $f(x) = \ln(e^x - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ.2. Είναι $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0) = \ln(e^0 - 0) = 0$



Γ.3.

$$f''(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' = \dots = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0 \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2e^x - xe^x - 1, x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση (2) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $h(x) = 0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1-x)$.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h		\nearrow		\searrow	
	-1		$e-1$		$-\infty$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = 2 \cdot 0 - 0 - 1 = -1$$

$$h(1) = 2e^1 - 1 \cdot e^1 - 1 = e - 1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[xe^x \left(2 \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e^x} \right) \right] \stackrel{(+\infty)(+\infty)(2 \cdot 0 - 1 - 0)}{=} -\infty$$

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ Το σύνολο τιμών της είναι: $h(\Delta_1) = (-1, e - 1]$

Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$ και h γνησίως αύξουσα στο Δ_1 η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in \Delta_1$

- Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$ Το σύνολο τιμών της είναι: $h(\Delta_2) = (-\infty, e - 1)$

Επειδή $0 \in h(\Delta_2)$ και h γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_2 \in \Delta_2$

Επομένως, τόσο η εξίσωση $h(x) = 0$, όσο και η ισοδύναμή της $f''(x) = 0$ έχουν ακριβώς δυο ρίζες $x_1 \in \Delta_1$ και $x_2 \in \Delta_2$.

	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	\curvearrowright		\curvearrowleft		\curvearrowright

Σ.Κ. Σ.Κ.

Διότι $x > x_2 \Leftrightarrow h(x) < h(x_2) \Leftrightarrow h(x) < 0$
 $x < x_1 \Leftrightarrow h(x) < h(x_1) \Leftrightarrow h(x) < 0$
 $\left. \begin{matrix} 1 < x < x_2 \\ x_1 < x < 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow h(x) > 0$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στα x_1, x_2 (δηλαδή έχει εφαπτομένη στα σημεία αυτά), θα έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής, τα $M_1(x_1, f(x_1))$ και $M_2(x_2, f(x_2))$.

Γ.4. Η εξίσωση γίνεται $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι $\varphi(0) = f(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 - 1 = -1 < 0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή $\frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ Άρα και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

• Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά μεταξύ των συνεχών συναρτήσεων.

• $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

• Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0$. Άρα, η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\varphi'(x) = f'(x) + \eta\mu x \Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x$

Επειδή για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\eta\mu x > 0$ και για $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0$

Έχουμε ότι $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $\varphi \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ θα έχει το πολύ μια ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$, αυτή θα είναι και η μοναδική ρίζα.

ΘΕΜΑ Δ

Για το ολοκλήρωμα-συνάρτηση $I(x) = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$ θέτουμε $x+t = u \Leftrightarrow t = u - x$

Τότε, $dt = du$ και

- Για $t = 0, u = x$
- Για $t = -x, u = 0$

Επομένως: $I(x) = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u} \cdot e^{-2x}}{g(u)} du = -e^{-2x} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$

Άρα, $I(x) = -\frac{1}{e^{2x}} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ Ομοίως (με την ίδια αντικατάσταση), προκύπτει: $J(x) = -\frac{1}{e^{2x}} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$



Δ.1. Έχουμε: $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = -\frac{1}{e^{2x}} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Επειδή οι συναρτήσεις $g(u)$ και e^{2u} είναι συνεχείς στο \mathbb{R} , η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ θα είναι συνεχής

στο \mathbb{R} , επομένως η $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ θα είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) = e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ομοίως, προκύπτουν: $g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot g'(x) = e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x)g(x) = f(x)g'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{g(x)} = \frac{g'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (\ln g(x))' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $\ln f(x) = \ln g(x) + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει: $\ln f(0) = \ln g(0) + c \Leftrightarrow \ln 1 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα, $\ln f(x) = \ln g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ.2.

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot f(x)g(x) = e^{2x}}{g(x)} = \frac{e^{2x}}{f(x)} = f(x) \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = ce^x \Leftrightarrow f(x) = e^x$$

Δ.3. $L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} e^{-x} = -\infty$

Δ.4. Η $f(t^2) = e^{t^2}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R} , επομένως η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $F'(x) = f(x^2) = e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης $F(x) = \int_1^x f(t^2) dt < 0$, αφού $f(t^2) = e^{t^2} > 0$ και $x < 1$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |F(x)| dx = -\int_0^1 F(x) dx = -\int_0^1 (x)' F(x) dx = -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xF'(x) dx = \\ &= -1 \cdot F(1) + 0 \cdot F(0) + \int_0^1 xe^{x^2} dx \stackrel{F(1)=0}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες.} \end{aligned}$$

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας