

Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2012
ΘΕΜΑ Α

A.1. Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ.253

A.2. Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 191

A.3 Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 258

A.4. α. → Σ β. → Σ γ. → Λ δ. → Λ ε. → Λ

ΘΕΜΑ Β
B.1. α' τρόπος:

Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, η σχέση (1) γράφεται:

$$|(x-1) + yi|^2 + |(x+1) + yi|^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$. Συνεπώς $|z| = 1$.

β' τρόπος:

Η σχέση (1) γράφεται: $(z-1) \cdot \overline{(z-1)} + (z+1) \cdot \overline{(z+1)} = 4 \Leftrightarrow (z-1) \cdot (\bar{z}-1) + (z+1) \cdot (\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow$

$$z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot z \cdot \bar{z} = 2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

B.2.

- Είναι $|z_1| = 1$ και $|z_2| = 1$
- $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 0$
- $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \dots = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2) = 2$
Άρα, $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

B.3. Έστω $w = x + yi$

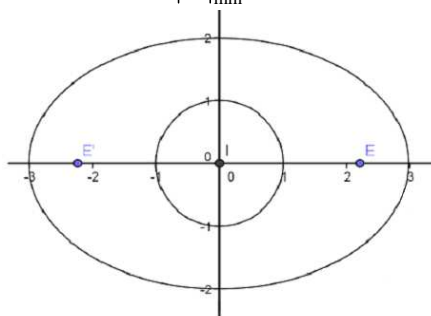
$$\text{Είναι: } |w - 5\bar{w}| = 12 \Leftrightarrow |x + yi - 5(x - yi)| = 12 \Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι έλλειψη με μήκος μεγάλου ημιάξονα $\alpha = 3$ και μήκος μικρού ημιάξονα $\beta = 2$.

Αν A', B, B', B οι κορυφές της έλλειψης, τότε: $A'(-3, 0), B(3, 0), B'(0, -2), B(0, 2)$.

- Έστω $M(w)$ η εικόνα του w . Είναι $\beta \leq (OM) \leq \alpha \Leftrightarrow 2 \leq (OM) \leq 3$. Άρα, $2 \leq |w| \leq 3$.

Επομένως $|w|_{\max} = (OA) = (OA') = 3$ και $|w|_{\min} = (OB) = (OB') = 2$.



B.4. α' τρόπος:

Με τη βοήθεια του σχήματος προκύπτει ότι:

$$\max |z - w| = (A\Gamma') = 4$$

$$\min |z - w| = (B\Delta) = 1$$

β' τρόπος:

Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας και επειδή $|z - w| = |w - z|$ έχουμε:

$$\left| |w| - |z| \right| \leq |w - z| \leq |w| + |z| \Leftrightarrow \left| |w| - 1 \right| \leq |w - z| \leq |w| + 1 \quad (4)$$

Όμως από **B3** προκύπτει: $2 \leq |w| \leq 3$,

Άρα $|w| - 1 \geq 1$ και $|w| + 1 \leq 4$. Τότε η (4) γράφεται: $1 \leq |w - z| \leq 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, x > 0$.

Είναι $f'(1) = 0$ (προφανής λύση)

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, συνεπώς η προφανής λύση είναι μοναδική.

Οπότε για $0 < x < 1$ ισχύει $f'(x) < f'(1) = 0$ και για $x > 1$ ισχύει $f'(x) > f'(1) = 0$.

Επομένως προκύπτει ο πίνακας των μεταβολών:

Άρα, η f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0, 1]$ και f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

Είναι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1) \ln x - 1] = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1) \ln x - 1] = +\infty$.

• Η f είναι συνεχής στο $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα. Άρα, $f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = [-1, +\infty)$.

• Η f είναι συνεχής στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα. Άρα, $f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-1, +\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$.

Γ2. Για $x > 0$: $x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln(x^{x-1}) = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1) \ln x = 2013 \Leftrightarrow f(x) = 2012$.

Το $2012 \in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0, 1) : f(x_1) = 2012$ (από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών) (όπου x_1 μοναδικό αφού f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1)

Ομοίως $\dots f(x_2) = 2012$. Άρα, η εξίσωση έχει 2 ακριβώς λύσεις.

Γ.3. α' τρόπος:

Θα δειχθεί ότι: $f'(x) + f(x) = 2012$ για $x = x_0 \in (x_1, x_2)$ ή

$$e^x f'(x) + e^x f(x) = 2012e^x \quad \text{για } x = x_0 \in (x_1, x_2) \text{ ή}$$

$$(e^x f(x) - 2012e^x)' = 0 \quad \text{για } x = x_0 \in (x_1, x_2)$$

Έστω $g(x) = e^x f(x) - 2012e^x$ για $x \in [x_1, x_2]$

- g συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- g παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $g'(x) = \dots$
- $g(x_1) = e^{x_1} (f(x_1) - 2012) = 0$ από Γ2 και $g(x_2) = e^{x_2} (f(x_2) - 2012) = 0$ από Γ2

Από Θεώρημα Rolle: υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) : g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.



β' τρόπος:

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f'(x) + f(x) - 2012, x \in [x_1, x_2]$

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
 - $g(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) < 0$ γιατί $f(x_1) = 2012$ και $f'(x_1) < 0$ για $x_1 \in \Delta_1$.
 - $g(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) > 0$ γιατί $f(x_2) = 2012$ και $f'(x_2) > 0$ για $x_2 \in \Delta_2$.
- Τότε, $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$.

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

Γ4. Είναι $g(x) = (x-1) \ln x$ συνεχής στο $(0, +\infty)$.

- $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, άρα

$$E = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx \Leftrightarrow E = \int_1^e \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]' \ln x dx = \dots = \frac{e^2 - 3}{4}$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- f συνεχής με $f(x) \neq 0$ για $x > 0$. Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0, +\infty)$.
- Αν $g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}, x > 0$ τότε $\left. \begin{matrix} g(x) \geq 0 & \text{για κάθε } x > 0 \\ g(1) = 0 \end{matrix} \right\}$ Άρα $x_0 = 1$ θέση ελαχίστου.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα η συνάρτηση $\int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $g'(x) = (2x-1)f(x^2-x+1) - \frac{1}{e}(1-2x)$ για $x > 0$.

Άρα $g'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$ (Θεώρημα Fermat) οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

* Για $x > 0$ έχουμε:

$$\ln x - x = - \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) |f(x)| \Leftrightarrow \ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e.$$

Τότε: $\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt \right)' = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$ ή

$$\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right)' = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e = ce^x, x > 0. \text{ (εφαρμογή σχολικού σελ. 252)}$$

Για $x = 1, e = c \cdot e \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e = e^x$ τότε

$$\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} (\ln x - x), x > 0. \text{ Άρα, η } f \text{ παραγωγίσιμη στο}$$

$(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Δ2. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [e^{-x}(\ln x - x)] = -\infty$. Θέτουμε $\frac{1}{f(x)} = u$. Όταν $x \rightarrow 0^+$ το $u \rightarrow 0^-$. Τότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{u^2} \eta\mu u - \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{(\eta\mu u - u)'}{(u^2)'} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \text{ εφαρμόζοντας κανόνα De L' Hospital γιατί ισχύουν οι προϋποθέσεις του.} \end{aligned}$$

Δ3. Είναι: $F'(x) = f(x) < 0$ για $x > 0$. (Είναι $f(x) < 0$ αφού $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x \leq -1$)

$$F''(x) = f'(x) = e^{-x} \left(-\ln x + \frac{1}{x} + x - 1 \right) = e^{-x} \left[\left(x - 1 - \ln x \right) + \frac{1}{x} \right] > 0, x > 0$$

Άρα F κυρτή στο $(0, +\infty)$ και F' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Από $F(x) + F(3x) > 2F(2x) \Leftrightarrow F(3x) - F(2x) > F(2x) - F(x)$, προκύπτει: $\frac{F(3x) - F(2x)}{x} > \frac{F(2x) - F(x)}{x}$

για $x > 0$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στα $[x, 2x]$, $[2x, 3x]$ οπότε υπάρχουν:

$$\xi_1 \in (x, 2x) \text{ και } \xi_2 \in (2x, 3x) \text{ με } F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x} \text{ και } F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \text{ αντίστοιχα.}$$

Είναι $\xi_1 < \xi_2$ και F' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Συνεπώς έχουμε:

$$F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \Leftrightarrow F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x).$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$, $x \in [\beta, 2\beta]$ όπου $\beta > 0$.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $h(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ (από το Δ3 για $x = \beta$)
 $h(\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$ (διότι $\beta < 3\beta$ και F γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, αφού $F'(x) = f(x) < 0$ για $x > 0$. Συνεπώς $F(\beta) > F(3\beta)$). Άρα $h(2\beta) \cdot h(\beta) < 0$.

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$.

Είναι $h'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\beta, 2\beta]$, συνεπώς "1-1" και επομένως το ξ είναι μοναδικό.

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας