

**Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2013**
**ΘΕΜΑ Α**
**A.1.** Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ.334-335

**A.2.** Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 246

**A.3** Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 222

**A.4.** α. → Λ      β. → Σ      γ. → Σ      δ. → Λ      ε. → Σ

**ΘΕΜΑ Β**
**B.1.** Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$|z - 2|^2 + |z - 2| = 2 \Leftrightarrow |z - 2|^2 + |z - 2| - 2 = 0.$$

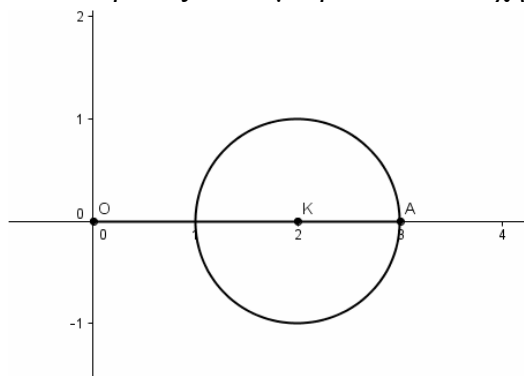
$$\text{Αν } |z - 2| = y \text{ είναι } y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -2.$$

$$\text{Όμως } y = |z - 2| \geq 0 \text{ άρα } |z - 2| = 1.$$

 Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  είναι κύκλος με κέντρο  $K(2, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

$$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } |z| = |(z - 2) + 2| \leq |z - 2| + |2| = 1 + 2 = 3.$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος: Γεωμετρικά από το σχήμα βλέπουμε ότι } |z|_{\max} = (OA) = 3, \text{ άρα } |z| \leq 3.$$


**B.2.**
 $1^{\text{ος}}$  τρόπος:

 Αφού οι μιγαδικοί  $z_1, z_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ , με  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  θα είναι συζυγείς μιγαδικοί, άρα της μορφής  $z_1 = x + yi$  και  $z_2 = x - yi$  και από τη δοσμένη σχέση έχουμε

$$|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2yi| = 2 \Leftrightarrow |y| = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1.$$

$$\text{Από την εξίσωση του γ.τ.: } (x - 2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2, \text{ οπότε } z_1 = 2 + i \text{ και } z_2 = 2 - i.$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta, έχουμε

$$S = z_1 + z_2 = 2\text{Re}(z_1) = -\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = -4,$$

$$P = z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = 5 \Leftrightarrow \gamma = 5.$$

 $2^{\text{ος}}$  τρόπος:

$$\text{Είναι } z_1 = \frac{-\beta - \sqrt{-\Delta} \cdot i}{2} \text{ και } z_2 = \frac{-\beta + \sqrt{-\Delta} \cdot i}{2}, \text{ οπότε}$$

$$|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow 4\gamma - \beta^2 = 4 \quad (1).$$

Επειδή  $z_1$  ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1 είναι:

$$\left(-\frac{\beta}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2}+2\right)^2 + \frac{4\gamma-\beta^2}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4} + 2\beta + 4 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\beta + \gamma = -3, \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει  $\beta = -4$  και  $\gamma = 5$ .

**B.3.**

1<sup>ος</sup> τρόπος:

Έστω  $|v| \geq 4$ . Έχουμε  $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$ .

Άρα  $|v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|$ .

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι  $|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|$ .

Από Β1 είναι  $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$ , άρα  $|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1)$ .

Η τελευταία γράφεται  $|v|^3 \leq 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1}$  (είναι  $|v| - 1 > 0$  αφού  $|v| \geq 4$ )  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3$ .

Όμως  $4 \cdot |v|^3 - 3 < 4 \cdot |v|^3$  άρα  $|v|^4 < 4 \cdot |v|^3 \Leftrightarrow |v| < 4$  που είναι άτοπο. Άρα  $|v| < 4$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος:

Έχουμε  $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$ .

Άρα  $|v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|$ .

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι  $|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|$ .

Από Β1 είναι  $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$ , άρα  $|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1)$ .

Άρα  $|v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0 < 1$

Τότε:  $|v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 < 1 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0 \Leftrightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) < 0 \Leftrightarrow |v| < 4$

διότι  $|v|^2 + |v| + 1 > 0$

3<sup>ος</sup> τρόπος: *(η λύση διαμορφώθηκε από εμάς και το Νίκο Ζανταρίδη πάνω σε ιδέα μιάς μαθήτριας του)*

Ομοίως με τα παραπάνω, έστω  $|v| \geq 4$  και καταλήγουμε πάλι

$|v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0$ . Θεωρούμε συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3, x \in [4, +\infty)$ .

Ισχύει  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 > 0$  όταν  $x \in [4, +\infty)$ , άρα η  $f$  γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο  $[4, +\infty)$ , επομένως έχουμε  $|v| \geq 4 \Rightarrow f(|v|) \geq f(4) \Rightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \geq 1 > 0$  άτοπο.

4<sup>ος</sup> τρόπος: *(του Νίκου Ζανταρίδη)*

Ομοίως με τα παραπάνω, έστω  $|v| \geq 4$  και καταλήγουμε πάλι  $|v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3. \quad (1)$

Είναι όμως  $|v|^3 = |v||v|^2 \geq 4|v|^2 = 3|v|^2 + |v||v| \geq 3|v|^2 + 4|v| = 3|v|^2 + 3|v| + |v| \geq 3|v|^2 + 3|v| + 4 > |v|^3$ , <sup>(1)</sup> άτοπο.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Για  $x \in \mathbb{R}$  η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(f(x)+x)(f(x)+x)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \left[\frac{(f(x)+x)^2}{2}\right]' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \frac{(f(x)+x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Για  $x=0$ :  $\frac{1}{2} = c.$

Έτσι  $\frac{(f(x)+x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = x^2 + 1.$

Θέτουμε  $g(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $g^2(x) = x^2 + 1 > 0$  οπότε έχουμε  $g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x)$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή  $g(0) = f(0) > 0$  θα είναι  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , δηλαδή  $f(x) + x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα  $f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}.$

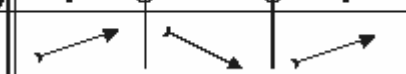
**Γ2.** 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Για κάθε  $x \in \mathbb{R} f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα  $f \searrow$  στο  $\mathbb{R}$  οπότε "1-1"

$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0$ . Έχουμε  $g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$

<b>x</b>	$-\infty$	<b>-1</b>	<b>0</b>	$+\infty$	
<b>g'(x)</b>	+	0	-	0	+
<b>g(x)</b>					

$g(-1) = -\frac{1}{2} \quad g(0) = -1$

Για  $x \in (-\infty, 0]$  ισχύει  $g(x) \leq -\frac{1}{2}$

Για  $x \geq 0, g(A_2) = g([0, +\infty)) = [g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = [-1, +\infty)$

Το  $0 \in g(A_2)$  με, άρα  $\exists x_0$  μοναδικό με  $g(x_0) = 0$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος:

Είναι  $f(g(x)) = \sqrt{g^2(x) + 1} - g(x) = 1.$

Άρα  $\sqrt{g^2(x) + 1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x) + 1} = g(x) + 1 \quad (1).$

Πρέπει  $g(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2 \left(x + \frac{3}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty).$

Τότε από την (1) προκύπτει:

$$g^2(x) + 1 = g^2(x) + 1 + 2g(x) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$ .

Είναι  $\varphi'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$ .

Άρα έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής:

x	-3/2	-1	0	+∞	
φ'(x)	+	0	-	0	+
φ(x)	↗		↘		↗

Προκύπτει τοπικό μέγιστο  $\varphi(-1) = -1$  και τοπικό ελάχιστο  $\varphi(0) = -2$ . Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της  $\varphi$  για  $x \in [0, +\infty)$  είναι το  $[-2, +\infty)$ , ενώ για  $x < 0$  είναι  $\varphi(x) < 0$ .

Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα για την  $\varphi$  στο  $(0, +\infty)$  και επειδή η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

**Γ.3.** Θέτουμε  $K(x) = \int_{x-\pi/4}^0 f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

Η  $K$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , ενώ επειδή  $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} - t > 0$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$

θα είναι  $\int_{-\pi/4}^0 f(t)dt > 0$ , δηλαδή  $K(0) > 0$ .

Επίσης είναι  $K\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0) \cdot \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1 < 0$ .

Έτσι όμως από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  τέτοιο

ώστε  $K(x_0) = 0$  ή  $\int_{x_0-\pi/4}^0 f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon\varphi x_0$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ 5 \cdot \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right] = 5f'(1) + f'(1) = 6f'(1).$$

διότι

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} \cdot 5 \stackrel{5h=u}{=} 5 \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = 5f'(1).$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \stackrel{-h=t}{=} - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = -f'(1).$

Άρα αφού

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

Για  $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$ .

Για  $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$ .

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1,+\infty)$  με  $f'(1) = 0$   
άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 1$ .

Δ2. Είναι  $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$ ,  $x \in (0,+\infty)$ .

Λόγω του  $\Delta_1$ , αφού στο  $x_0 = 1$  η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο, είναι  $f(x) \geq f(1) = 1$  για κάθε  $x \in (0,+\infty)$ .

Η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 1$ , άρα  $f(x) > 1$  για  $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ .

Έτσι  $f(x) - 1 > 0$  για  $x \in (1,+\infty)$  και  $x - 1 > 0$ , άρα  $g'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (1,+\infty)$ .

Άρα  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $(1,+\infty)$ .

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση  $\varphi(x) = \int_x^{x+1} g(u)du$ ,  $x \in (1,+\infty)$ .

Είναι  $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$ .

Όμως  $x < x+1$  και επειδή  $g$  γνησίως αύξουσα θα είναι  $g(x) < g(x+1)$ ,

άρα  $\varphi'(x) > 0$ , άρα  $\varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $x \in (1,+\infty)$ .

Επειδή  $8x^2 + 5 > 1$  &  $2x^4 + 5 > 1$ , έχουμε τις συνθέσεις

$\varphi(8x^2 + 5)$ ,  $\varphi(2x^4 + 5)$  με Π.Ο. =  $\mathbb{R}$  επομένως η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$\varphi(8x^2 + 5) > \varphi(2x^4 + 5) \Leftrightarrow 8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2).$$

\*\*\*Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε κι άλλες συναρτήσεις π'χ.  $\int_{x+5}^{x+6} g(u)du$ ,

Δ3. 1<sup>ος</sup> τρόπος:

$$\text{Είναι } g''(x) = \frac{(f(x)-1)'(x-1) - (f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2}.$$

(εδώ για το πρόσημο δε μπορούμε να θεωρήσουμε συνάρτηση του αριθμητή, γιατί η  $f'$  δε δίνεται παραγωγή, επομένως σκεφτόμαστε Θ.Μ.Τ.Δ.Δ.)

Για την  $f$  στο  $[1, x]$  ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (1, x) : \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) \Rightarrow \frac{f(x) - 1}{x - 1} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(x) - 1 = (x - 1)f'(\xi).$$

$$\text{Άρα } g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-1}.$$

Είναι  $\xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$ .

Επίσης για  $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ .

Έτσι  $g''(x) > 0$  για κάθε  $x > 1$  άρα  $g$  κυρτή στο  $(1,+\infty)$ .

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$(a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow g(x) = g'(a)(x-a).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης για την  $g$  στο  $x = a$  είναι

$$y - g(a) = g'(a)(x-a) \Leftrightarrow y = g'(a)(x-a).$$

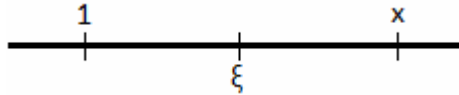
Αφού  $g$  κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή  $g(x) \geq y \Rightarrow g(x) \geq g'(a)(x-a)$  και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = a$ .  
 Άρα η εξίσωση  $g(x) = g'(a)(x-a)$  έχει μοναδική λύση  $x = a$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος:

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} \quad x > 1$$

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f(x) + 1}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)-1}{x-1}}{x-1}$$



Θ.Μ.Τ. για την  $f$  στο  $[1, x]$  άρα  $f'(\xi) = \frac{f(x)-1}{x-1}$

$$\xi < x \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)-1}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)-1}{x-1} > 0$$

Άρα  $g''(x) > 0, x > 1$  άρα  $g$  1 κυρτή.

Προφανής λύση το  $x_0 = a$

$$h(x) = (\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt - (f(\alpha)-1)(x-\alpha) = (\alpha - 1)g(x) - (f(\alpha)-1)(x-\alpha)$$

$$h'(x) = (\alpha - 1)g'(x) - (f(\alpha)-1) = (\alpha - 1) \left[ g'(x) - \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \right] \quad \parallel \alpha - 1 > 0$$

$$= (\alpha - 1)(g'(x) - g'(\alpha))$$

- Αν  $1 < x < a \stackrel{g' \nearrow}{\Leftrightarrow} g'(x) < g'(\alpha) \Leftrightarrow h'(x) < 0$  άρα  $h \searrow \rightarrow x_0$  μοναδική
- Αν  $x > a \stackrel{g' \nearrow}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(\alpha) \Leftrightarrow h'(x) > 0$  άρα  $h \nearrow \rightarrow x_0$  μοναδική

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας, Πετρόπουλος Κώστας