



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 194

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 188

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 259

A4. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1)$

$$z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow z\bar{z}+16=4z\bar{z}+4$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$.

B2. α) Αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{w} = w$.

$$\text{Έχουμε } \bar{w} = \overline{\left(\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right)} = 2 \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + 2 \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = 2 \frac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} + 2 \frac{\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} =$$

$$2 \frac{z_2}{z_1} + 2 \frac{z_1}{z_2} = w.$$

Άρα ο w είναι πραγματικός.

β) $|w| = \left| 2 \frac{z_1}{z_2} + 2 \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + 2 \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$

$$|w| \leq 2 \frac{|z_1|}{|z_2|} + 2 \frac{|z_2|}{|z_1|} \Leftrightarrow |w| \leq 2 + 2 \Leftrightarrow |w| \leq 4$$

Και επειδή $w \in \mathbb{R}$

$$-4 \leq w \leq 4.$$

B3. Αν $w = -4$

$$2 \frac{z_2}{z_1} + 2 \frac{z_1}{z_2} = -4 \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = -2 \Leftrightarrow$$

$$z_2^2 + z_1^2 = -2z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1$$

$$\begin{aligned} A\Gamma &= |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1 - 2i)| = |z_1| \cdot |1 - 2i| = \\ &= 4\sqrt{1^2 + 2^2} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$B\Gamma = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |-z_1(1 + 2i)| = |z_1| \cdot |1 + 2i| = 4\sqrt{5}$$

Άρα $A\Gamma = B\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.
$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Αφού $(x-1)^2 \geq 0$, $(x^2+1)^2 > 0$, $e^x > 0 \forall x \in A_f$ και f συνεχής στο $x_0 = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'		+	+
f		\nearrow	\nearrow

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Στο
$$\left. \begin{array}{l} A_1 = (-\infty, 1] \\ f \square A_1, \text{ συνεχής} \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(A_1) = \left(0, \frac{e}{2}\right]$$

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = [1, +\infty) \\ f \square A_2, \text{ συνεχής} \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(A_2) = \left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (0, +\infty)$.

Γ2.
$$f(e^{3-x}(x^2+1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x}(x^2+1)) = f(2) \Leftrightarrow e^{3-x}(x^2+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{2}{e^3} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Αφού το $\frac{e^3}{2} \in f(A)$, από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και αφού f γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική.

Γ3. Η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$\int_{2x}^a f(t) dt + \int_a^{4x} f(t) dt < 2x \cdot f(4x) \Leftrightarrow \int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt < \frac{2x}{2x} f(4x)$$

$$\frac{\int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt}{2x} < f(4x) = K'(4x) \quad (1)$$

Έστω η $K(x) = \int_a^x f(t) dt$, με f συνεχή. Άρα η K είναι παραγωγίσιμη.

Εφόσον $x > 0$, $2x < 4x$ και από Θεώρημα Μέσης Τιμής στο

$$[2x, 4x] \exists \xi \in (2x, 4x) \text{ ώστε } K'(\xi) = \frac{\int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt}{2x} \Leftrightarrow K'(\xi) = f(\xi).$$

Με $K'(x) = f(x) > 0 \Leftrightarrow K''(x) = f'(x) > 0$ (από ερώτημα Γ_1). Άρα K' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως $\xi < 4x \stackrel{K'}{\Leftrightarrow} K'(\xi) < K'(4x)$, που είναι η ζητούμενη.

Γ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ γιατί η f είναι συνεχή στο $(0, +\infty)$

$$2x, 4x > 0, a > 0 \text{ με } g(x) = \frac{\int_a^{4x} f(t) dt + \int_a^{2x} f(t) dt}{x} = \frac{\int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt}{x}$$

Άρα

$$g'(x) = \frac{[f(4x) \cdot 4 - f(2x) \cdot 2]x - \left(\int_a^{4x} f(t) dt - \int_a^{2x} f(t) dt \right)}{x^2} = \frac{f(4x) \cdot 4x - f(2x) \cdot 2x - \int_a^{4x} f(t) dt}{x^2}$$

$$= \frac{\left[2xf(4x) - \int_a^{4x} f(t) dt \right] + [2xf(4x) - 2xf(2x)]}{x^2} = \frac{\left[2xf(4x) - \int_a^{4x} f(t) dt \right] + 2x[f(4x) - f(2x)]}{x^2} > 0$$

Λόγω του ερωτήματος Γ_3

$$2xf(4x) - \int_a^{4x} f(t) dt > 0 \text{ \& } 2x[f(4x) - f(2x)] > 0 \text{ γιατί } x > 0 \text{ και καθώς η}$$

f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f(4x) > f(2x) \Leftrightarrow f(4x) - f(2x) > 0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Θα δείξουμε ότι η g είναι συνεχή στο $x_0 = 0$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_a^{4x} f(t) dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} [4f(4x) - 2f(2x)] \stackrel{(*)}{=}$$

$$= 4f(0) - 2f(0) = 2f(0) = 2 \cdot 1 = 2 = g(0)$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(*) Η συνάρτηση $[4f(4x) - 2f(2x)]$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} + e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 2$$

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} - 2 = -f'(x) \cdot e^{-f(x)}$$

$$(e^{f(x)} - 2x)' = (e^{-f(x)})'$$

$$e^{f(x)} - 2x = e^{-f(x)} + c \quad (1)$$

Για $x = 0$

$$e^0 - 0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα η (1) γίνεται:

$$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2$$

$$(e^{f(x)} - x)^2 = 1 + x^2$$

$$|e^{f(x)} - x| = \sqrt{1 + x^2} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Θέτω $g(x) = e^{f(x)} - x \neq 0$. Αφού η g είναι συνεχής και $g(x) \neq 0$, τότε διατηρεί πρόσημο.

Όμως $g(0) = 1 > 0$. Άρα $g(x) > 0$.

$$e^{f(x)} - x = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{1 + x^2}$$

$$\stackrel{\ln x}{\Leftrightarrow} f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

"1-1"

Δ2.



$$\alpha) f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$f''(x) = \frac{-\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'}{x^2 + 1} = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

$$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''		+	-
f			

Σ.Κ.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 0$ και η καμπή είναι το $f(0) = 0$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $(0, f(0))$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 1$$

Οπότε $y = x$.

Άρα η f είναι κοίλη για κάθε $x \geq 0$.

Επομένως ισχύει $f(x) \leq x$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα

$$E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - x| dx = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 \left[x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \left(\frac{x^2}{2}\right)'_0 = \frac{1}{2} \qquad I_2 = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x)' \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx &= \left[x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(1 + \sqrt{2}) - \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1 \quad \tau.\mu. \end{aligned}$$

Δ3. $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{\int_0^x f^2(t) dt - 0} \cdot \int_0^x f^2(t) dt \cdot \ln|f(x)|.$$

$$\Theta \acute{\epsilon} \tau \omega \quad \int_0^x f^2(t) dt = u, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f^2(t) dt = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH \ u \rightarrow 0} \frac{(e^u - 1)'}{(u)'} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{\int_0^x f^2(t) dt} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f^2(t) dt \cdot \ln|f(x)| =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f^2(t) dt \cdot \ln|f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|f(x)|}{\frac{1}{\int_0^x f^2(t) dt}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{(\ln|f(x)|)'}{\left(\frac{1}{\int_0^x f^2(t) dt}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)}{\frac{1}{\left(\int_0^x f^2(t) dt\right)^2} \cdot 2f(x) \cdot f'(x)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f^2(t) dt \right)^2}{2f^2(x)} \stackrel{\text{DLH}}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f^2(t) dt \cdot f^2(x)}{2 \cdot 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f^2(t) dt}{2 \cdot f'(x)} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot \int_0^x f^2(t) \cdot \ln|f(x)| = 0.$$

Δ4. Θεωρώ $K(x) = (x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)$

Επειδή $f(t)$ συνεχής τότε οι $f^2(t)$ & $f(t^2)$ συνεχείς ως σύνθεση συνεχών, άρα η K παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[2, 3]$.

$$K(2) = 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8 < 0$$

Αιτιολόγηση:

Η f είναι κοίλη, τότε η εφαπτομένη της $y = x$ είναι πάνω από την C_f .

Άρα $f(t) \leq t$. Επειδή $f(t) > 0$, έχουμε

$$f^2(t) \leq t^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \int_0^2 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt \leq \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(t) dt < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8 < 0$$

$$K(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt > 0$$

Αιτιολόγηση:

$$f(t) \leq t \Leftrightarrow f(t^2) \leq t$$

$$f(t^2) \leq t \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \int_0^1 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt \leq \frac{1}{3}$$

Άρα $K(2) \cdot K(3) < 0$. Επομένως από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3) : K(x_0) = 0$

O.E.F.F.E.