
Εκπαιδευτικό σενάριο

➤ **Τίτλος**

«Ανακαλύπτοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα και το Αντίστροφο του»

Ταυτότητα του σεναρίου

➤ **Συγγραφέας**

Πετρίδης Γ. Απόστολος

➤ **Γνωστική περιοχή**

Γεωμετρία Β' Γυμνασίου

➤ **Θέμα**

Γεωμετρική ερμηνεία του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του αντιστρόφου του με τη βοήθεια των εμβαδών.

➤ **Τεχνολογικά εργαλεία**

Η υλοποίηση του σεναρίου γίνεται με τη χρήση ιστοσελίδων με μικροεφαρμογές (applet) της Geogebra.

➤ **Βασική ιδέα**

Εδώ σ' αυτό το σενάριο, επιχειρείται να δοθεί η δυνατότητα στο μαθητή, κάνοντας αλλαγές στο σχήμα άλλοτε υπό την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και άλλοτε με δική του πρωτοβουλία και σημειώνοντας κάποιες μετρήσεις να καταλήξει μόνος του στη διατύπωση του θεωρήματος και του αντιστρόφου του.

Σκεπτικό της δραστηριότητας

➤ Καινοτομίες

Χρήση του λογισμικού Geogebra

➤ Προστιθέμενη αξία

Το εκπαιδευτικό αυτό σενάριο σαφώς και αποτελεί μια καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας του συγκεκριμένου θεωρήματος αλλά φιλοδοξεί να έχει και ευρύτερες επιρροές, πιο συγκεκριμένα:

Φιλοδοξεί να συμβάλλει στην αλλαγή – βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Φιλοδοξεί στο να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης.

Απαραίτητη φυσικά είναι η αλλαγή του ρόλου του εκπαιδευτικού, που από παραδοσιακός καθηγητής μετωπικών διδασκαλιών και αυθεντία της γνώσης καλείται να γίνει συνεργάτης των μαθητών αλλά και ερευνητής ο ίδιος.

Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει αρκετά προς αυτήν την κατεύθυνση.

Ιδιαίτερη αξία επίσης έχουν για τους μαθητές και τα παρακάτω:

- α. Έρχονται σε επαφή με το λογισμικό και μαθαίνουν κάποιες βασικές λειτουργίες του
- β. Παίρνουν έτοιμο ένα σχήμα στο οποίο όμως έχουν τη δυνατότητα κινώντας ορισμένα στοιχεία του να παρατηρήσουν πώς κάποια άλλα στοιχεία του αποκρίνονται δυναμικά σ' αυτές τις αλλαγές.
- γ. Καταγράφοντας τις μετρήσεις που οι ίδιοι έκαναν, καταλήγουν από μόνοι τους στο συμπέρασμα κάτι που έχει μια ιδιαίτερη διδακτική αξία. Έτσι δεν λαμβάνουν απλά μια θεωρητική γνώση που διδάσκεται κυρίως μετωπικά με άξονα την απομνημόνευση της θεωρίας και την εξάσκηση στη λύση ασκήσεων με στόχο αποκλειστικά την αντιμετώπιση των εξετάσεων.

➤ Γνωστικά – Διδακτικά προβλήματα

Η διδασκαλία του συγκεκριμένου θεωρήματος δίνεται ως συνήθως με τη διατύπωση του, κάτι που διαπιστωμένα δυσκολεύει τους μαθητές τόσο στην κατανόηση όσο και την αποστήθιση του.

Εδώ γίνεται μια προσπάθεια, με τη βοήθεια μιας κατασκευής σε ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, να παραμεριστεί αυτό το πρόβλημα.

Η συγκεκριμένη κατασκευή παρότι είναι εύκολη, δίνεται έτοιμη στους μαθητές, ώστε να είναι εμπλουτισμένη με τις «μετρήσεις» που είναι απαραίτητες για την διεκπεραίωση της εφαρμογής. Έτσι από τους μαθητές ζητείται απλά να πειραματιστούν, δηλαδή να «παιξουν» με το σχήμα, καταγράφοντας τις εκάστοτε μετρήσεις στα φύλλα εργασίας τους.

Πλαίσιο εφαρμογής

➤ Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Β' Γυμνασίου.

➤ Χρόνος Υλοποίησης

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 4 – 5 διδακτικές ώρες.

➤ Χώρος Υλοποίησης

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Η υλοποίηση στην τάξη με τη χρήση βιντεοπροβολέα δεν συνιστάται καθώς έτσι ακυρώνεται το διερευνητικό μέρος των δραστηριοτήτων και ο πειραματισμός από τους μαθητές, οπότε χάνεται το μεγαλύτερο μέρος της προστιθέμενης αξίας.

➤ Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

Τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού ενός τετραγώνου και ενός τριγώνου (ήδη διδαγμένα από προηγούμενη ενότητα)

Την τοποθέτηση σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο όταν δοθούν οι συντεταγμένες του (ήδη γνωστό από την Α' Γυμνασίου)

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

Τις βασικές γνώσεις για τη χρήση Η/Υ.

➤ Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή με σκοπό να καθοδηγήσουν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων. Τετράδιο, το οποίο θα χρησιμοποιείται κυρίως για την εκτέλεση πράξεων ή τυχόν σημειώσεων που θα θελήσουν να κρατήσουν οι μαθητές.

➤ Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες των δύο ατόμων – με διακριτό το ρόλο τους καθενός – καθόλη τη διάρκεια της δραστηριότητας και καθοδηγούμενοι από τα φύλλα εργασίας, καλούνται να πειραματιστούν με τα σχήματα και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματα τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν τη διερεύνηση.

➤ Προετοιμασία

Οι Η/Υ που θα χρησιμοποιηθούν θα πρέπει να έχουν:

- Εγκατεστημένο ένα φυλλομετρητή για το άνοιγμα των ιστοσελίδων
- Εγκατεστημένη την εφαρμογή java ώστε να εκτελούνται οι μικροεφαρμογές της Geogebra.
- Πρόσβαση στο διαδύκτιο. Προαιρετικά μπορεί να δημιουργηθεί στην επιφάνεια εργασίας των Η/Υ μία συντόμευση προς τον σύνδεσμο <http://users.sch.gr/apopet3/tpe/pth>, για ευκολότερη εκκίνηση του περιβάλλοντος.

➤ Στόχοι της δραστηριότητας

Από την παιδαγωγική πλευρά, οι μαθητές θα πρέπει:

Να μάθουν να συνεργάζονται μεταξύ τους, να συζητούν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώνουν τα συμπεράσματα τους.

Να μάθουν να πειραματίζονται με τις περιεχόμενες μαθηματικές έννοιες.

Να τους δοθεί η ευκαιρία και η χαρά της ανακάλυψης της γνώσης.

Από την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου, οι μαθητές θα πρέπει:

Να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφο του.

Να εφαρμόζουν σε ασκήσεις το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφο του.

Ανάλυση της Δραστηριότητας

➤ Περιγραφή των επιμέρους δραστηριοτήτων – Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

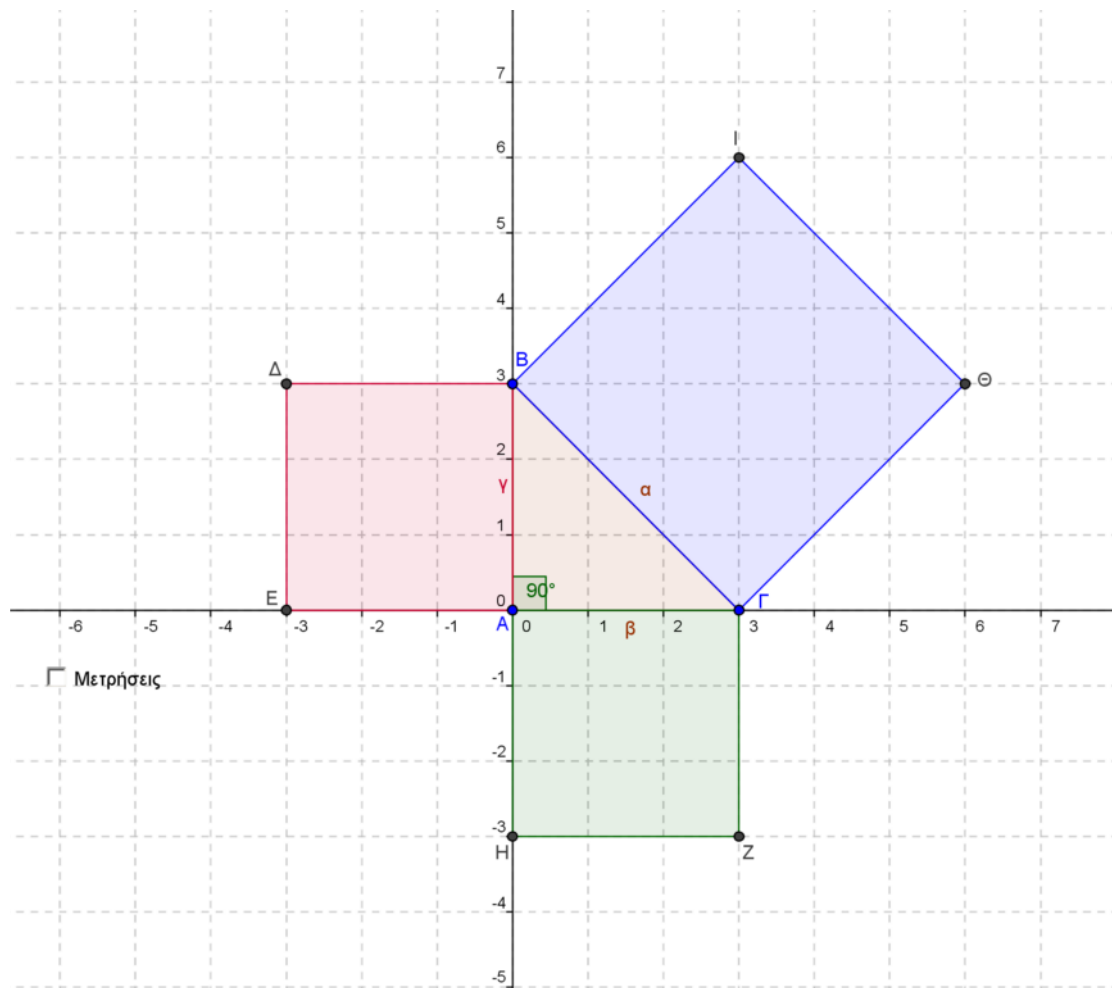
Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί στις παρακάτω φάσεις:

1^η Φάση: Γνωριμία με το λογισμικό

Γίνεται μια πρώτη επαφή των μαθητών με την Geogebra, όπου με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, τους δίνεται η δυνατότητα να γνωρίσουν κάποιες βασικές λειτουργίες του λογισμικού και να πειραματιστούν με αυτές. Όπως η κατασκευή τριγώνου, τετραγώνου με τη βοήθεια του αντίστοιχου εργαλείου, η εμφάνιση καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων με πλέγμα, η δυνατότητα μετακίνησης σημείων που συνεπάγεται και την ταυτόχρονη μεταβολή των σχημάτων, η προβολή μετρήσεων για ένα σχήμα, η σύλληψη σημείου σε σύστημα με πλέγμα, λειτουργίες δηλαδή που καλό θα είναι να έχουν δει από την αρχή για καλύτερη κατανόηση της δραστηριότητας. Εδώ προτείνεται να αφιερωθεί 1 διδακτική ώρα.

2^η Φάση:

Οι μαθητές καλούνται να πληκτρολογήσουν τον παρακάτω σύνδεσμο <http://users.sch.gr/apopet3/tpe/pth> που παραπέμπει σε μια σελίδα που αποτελείται από δύο μέρη, το μενού και την κυρίως σελίδα. Από το μενού ο μαθητής επιλέγει το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχει μπροστά του έτοιμη την παρακάτω κατασκευή που παρότι είναι εύκολη, δίνεται έτοιμη ώστε να είναι εμπλουτισμένη με το κουμπί «μετρήσεις» που είναι απαραίτητο για την διεκπεραίωση της εφαρμογής.



Οι μαθητές στην συνέχεια λαμβάνουν το παρακάτω φύλλο εργασίας (έντυπο), το οποίο και προσπαθούν να συμπληρώσουν. Σ' αυτό το φύλλο εργασίας στα δύο πρώτα του βήματα δίνεται η οδηγία στους μαθητές να μετακινήσουν τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου σε συγκεκριμένες θέσεις, ώστε το τρίγωνο να παραμένει ισοσκελές και έτσι να έχουν οι μαθητές τη δυνατότητα να μετρήσουν τα εμβαδά των τετραγώνων και από μόνοι τους, δηλαδή με τη βοήθεια του πλέγματος. Επίσης για τον ίδιο λόγο έχει γίνει και ενεργοποίηση της επιλογής «σύλληψη σημείου σε σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα». Εδώ προτείνεται να αφιερωθεί 1 διδακτική ώρα.

1° Φύλλο Εργασίας

Γεωμετρική Ερμηνεία του Πυθαγορείου Θεωρήματος με την βοήθεια εμβαδών

1ο βήμα. Εξωτερικά του τριγώνου που έχει πλευρές $a = 3$, $b = 3$ υπάρχουν τρία τετράγωνα. Κάνοντας μετρήσεις να υπολογίσετε:

- i. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $E_1 = \dots$
- ii. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $E_2 = \dots$
- iii. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $E_3 = \dots$
- iv. Το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων και είναι: $E_1 + E_2 = \dots$
- v. Επαληθεύστε τις μετρήσεις που κάνατε πατώντας το κουμπί «Μετρήσεις» που βρίσκετε στο αριστερό κάτω μέρος της οθόνης (στο 3° τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων)

Τι παρατηρείτε;

2ο βήμα. Μετακινείτε το σημείο προς τα δεξιά ώστε να βρεθεί στην θέση $(4, 0)$ και το σημείο προς τα πάνω ώστε να βρεθεί στην θέση $(0, 4)$. Επαναλαμβάνοντας με τον ίδιο τρόπο τις μετρήσεις που κάνατε στο **1° βήμα** να υπολογίσετε:

- i. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $E_1 = \dots$
- ii. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $E_2 = \dots$
- iii. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $E_3 = \dots$
- iv. Το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων και είναι: $E_1 + E_2 = \dots$
- v. Επαληθεύστε τις μετρήσεις που κάνατε πατώντας το κουμπί «Μετρήσεις» που βρίσκετε στο αριστερό κάτω μέρος της οθόνης (στο 3° τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων)

Τι παρατηρείτε;

3ο βήμα. Μετακινώντας τα σημεία και σε οποιοδήποτε θέσεις πάνω στους ημιάξονες x και Oy αντίστοιχα, επαναλάβετε αυτά που κάνατε στο **1° και 2° βήμα**.

Τι παρατηρείτε;

Συμπερασματικά

Επειδή όπως ήδη γνωρίζουμε το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} a^2$, ποια ισότητα θα μπορούσαμε να γράψουμε που να συνδέει τις πλευρές του τριγώνου ;

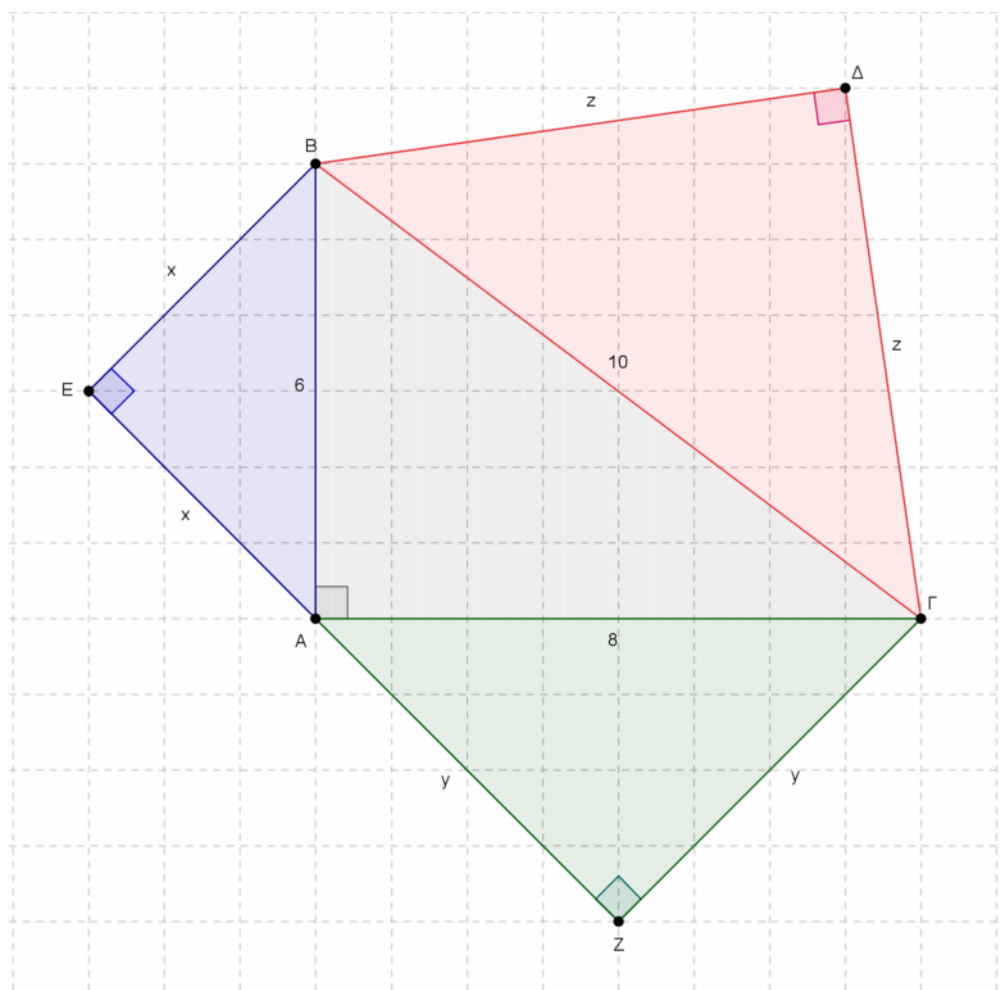
Προσπαθήστε να περιγράψετε με λόγια την παραπάνω ισότητα η οποία εκφράζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

.....
.....
.....

3η Φάση:

Εδώ ο εκπαιδευτικός μέσα από το μενού της προαναφερθείσης σελίδας παραπέμπει τους μαθητές στο παρακάτω σχήμα και σε ένα 2^ο φύλλο εργασίας, το οποίο έχει σαν σκοπό την πρακτική εφαρμογή του θεωρήματος, αλλά και ενδεχομένως μία επέκτασή του.

Εδώ προτείνεται να αφιερωθούν 2 διδακτικές ώρες.



2° Φύλλο Εργασίας

Μία πρακτική εφαρμογή – επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

1ο βήμα. Εξωτερικά του ορθογώνιου τριγώνου που έχει πλευρές $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$ υπάρχουν τρία ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα

$\triangle A_1 B_1 C_1$, $\triangle A_2 B_2 C_2$, $\triangle A_3 B_3 C_3$.

Να υπολογίσετε τις άγνωστες πλευρές x , y , z των τριγώνων $\triangle A_1 B_1 C_1$, $\triangle A_2 B_2 C_2$, $\triangle A_3 B_3 C_3$ αντίστοιχα.

Για να βρούμε την πλευρά x εφαρμόζουμε το Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A_1 B_1 C_1$

Οπότε έχουμε: $.....^2 +^2 =^2$

Για να βρούμε την πλευρά y εφαρμόζουμε το Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A_2 B_2 C_2$

Οπότε έχουμε: $.....^2 +^2 =^2$

Για να βρούμε την πλευρά z εφαρμόζουμε το Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A_3 B_3 C_3$

Οπότε έχουμε: $.....^2 +^2 =^2$

2ο βήμα. Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3 των τριγώνων $\triangle A_1 B_1 C_1$, $\triangle A_2 B_2 C_2$, $\triangle A_3 B_3 C_3$ αντίστοιχα.

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot \cdot =$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot \cdot =$$

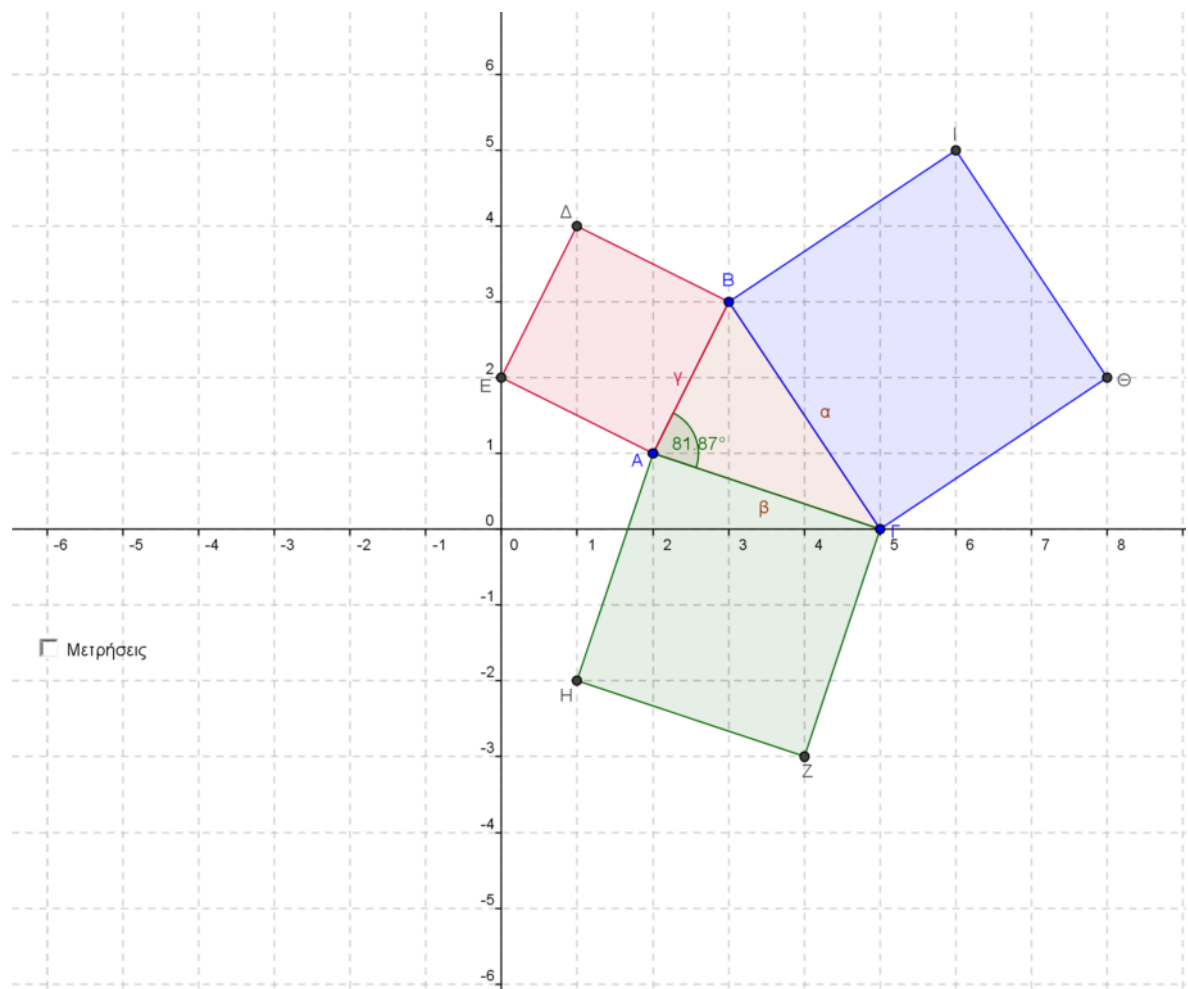
$$E_3 = \frac{1}{2} \cdot \cdot =$$

3ο βήμα. Ποια σχέση ισχύει μεταξύ των εμβαδών E_1, E_2, E_3 ;

.....

4η Φάση:

Σ' αυτήν την τελευταία φάση ο εκπαιδευτικός μέσα από το μενού της προαναφερθείσης ιστοσελίδας παραπέμπει τους μαθητές στο παρακάτω σχήμα και σε ένα 3^ο φύλλο εργασίας, με το οποίο προσπαθεί να εκμαιεύσει το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος. Εδώ προτείνεται να αφιερωθεί 1 διδακτική ώρα.



3^ο Φύλλο Εργασίας

Γεωμετρική Ερμηνεία του Αντίστροφου του Πυθαγορείου Θεωρήματος με την βοήθεια εμβαδών

1ο βήμα. Με την βοήθεια της επιλογής «Μετρήσεις» να καταγράψετε τα εμβαδά των τετραγώνων E_1 , E_2 και E_3 καθώς και το μέτρο της γωνίας A .

- i. Το εμβαδόν του τετραγώνου E_1 είναι: $E_1 = \dots$
- ii. Το εμβαδόν του τετραγώνου E_2 είναι: $E_2 = \dots$
- iii. Το εμβαδόν του τετραγώνου E_3 είναι: $E_3 = \dots$

2ο βήμα. Μετακινήστε τυχαία τα σημεία A ή B ή Γ (μικραίνοντας ή μεγαλώνοντας τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$) και επαναλάβετε ότι και προηγουμένως.

- i. Το εμβαδόν του τετραγώνου E_1 είναι: $E_1 = \dots$
- ii. Το εμβαδόν του τετραγώνου E_2 είναι: $E_2 = \dots$
- iii. Το εμβαδόν του τετραγώνου E_3 είναι: $E_3 = \dots$

3ο βήμα. Μετακινήστε κατάλληλα σημεία A ή B ή Γ ώστε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων E_1 , E_2 και E_3 να ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου E_4 . Τι παρατηρείτε για την γωνία \hat{A} ; Τι μπορείτε να συμπεράνετε;
.....
.....
.....

Συμπερασματικά

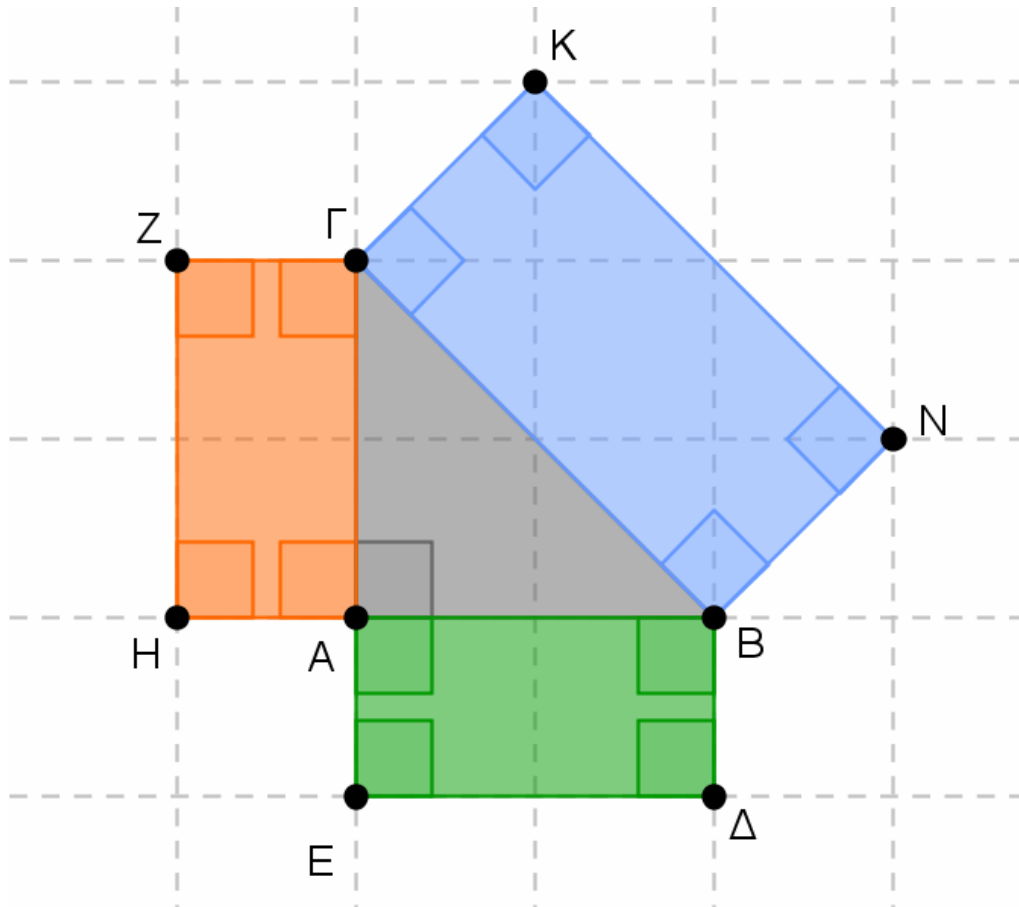
Επειδή όπως ήδη γνωρίζουμε το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} a^2$, ποια ισότητα θα λέγατε ότι πρέπει να ισχύει σαν προϋπόθεση ώστε ένα τρίγωνο να είναι ορθογώνιο (με $\hat{A} = 90^\circ$);

Προσπαθήστε να περιγράψετε με λόγια την παραπάνω ισότητα η οποία εκφράζει το Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεώρηματος:
.....
.....
.....

(Θεωρείται σκόπιμο στο τέλος κάθε φάσης, όλες οι ομάδες να κάνουν μία σύντομη παρουσίαση των συμπερασμάτων τους.)

➤ **Προτεινόμενη Άσκηση**

Στο παρακάτω σχήμα εξωτερικά του ορθογωνίου τριγώνου $\hat{A} = 90^\circ$ έχουν κατασκευαστεί ορθογώνια που το μήκος του καθενός είναι μία πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου .



- i.** Ποια σχέση συνδέει το μήκος με το πλάτος σε καθένα από τα τρία ορθογώνια;
- ii.** Ποιο είναι το εμβαδόν του κάθε ορθογωνίου;
- iii.** Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του μεγαλύτερου ορθογωνίου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο άλλων ορθογωνίων;
- iv.** Από τα παραπάνω μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $c^2 = a^2 + b^2$;

➤ Τα εργαλεία

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν είναι τα φύλλα εργασίας και το λογισμικό.

Το προτεινόμενο λογισμικό επελέγη με κριτήριο την εξυπηρέτηση των αναγκών των προτεινόμενων δραστηριοτήτων.

Το Geogebra δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές:

Να επιλέγουν από ένα πλήθος εργαλείων αυτά που θεωρούν κατάλληλα για τις διερευνήσεις τους.

Να αναπτύσσουν στρατηγικές διερεύνησης και αξιοποίησης των εμπειριών τους και των εργαλείων του λογισμικού.

Να κινήσουν ορισμένα στοιχεία του σχήματος ελεύθερα για να παρατηρήσουν άλλα στοιχεία του σχήματος πώς ανταποκρίνονται δυναμικά σ' αυτές τις αλλαγές.

➤ Επέκταση της δραστηριότητας

Η δραστηριότητα θα μπορούσε να επεκταθεί και με μία ανάλογη κατασκευή μ' αυτήν που αφορούσε το 1^ο ή το 2^ο φύλλο εργασίας, όπου όμως εξωτερικά του ορθογωνίου τριγώνου θα υπήρχαν ημικύκλια ή ισόπλευρα τρίγωνα (ή γενικά οποιαδήποτε τρία όμοια μεταξύ τους σχήματα).

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή

Οι μαθητές κατά τη διάρκεια υλοποίησης του σεναρίου, ανταποκρίθηκαν με προθυμία στα ζητούμενα του. Η συμμετοχή τους ήταν ικανοποιητική καθ' όλη την διάρκεια.

Εξοικειώθηκαν σχετικά εύκολα και με τα φύλλα εργασίας και με τις μικροεφαρμογές και τον χειρισμό τους.

Γενικά οι στόχοι μάλλον επιτεύχθηκαν σε ικανοποιητικό βαθμό, κατά πολύ περισσότερο – ενδεχομένως – από μία κλασσική μετωπική διδασκαλία.

Βιβλιογραφία

Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κ.Σ.Ε τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, Α' έκδοση, (05/02/2010)

§2. Η σκοπιμότητα της ένταξης εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση

§6.1 Τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας

Η δομή ενός σεναρίου (§8.2.3)

Σενάριο 3. Τα μέσα των πλευρών τριγώνου

Σενάριο 7. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$

Μαθηματικά και Τ.Π.Ε

Σενάριο Πετρίδη Παντελή (<http://users.pel.sch.gr/ppetridis>) για τα κανονικά πολύγωνα

Από τα Μαθηματικά, των Μαθηματικών, των Μαθητών ... του Γιώργου Μαντζώλα (<http://users.sch.gr/geoman22>).