

Προσημασμένοι αριθμοί

Τα δεδομένα σε ένα ψηφιακό σύστημα μπορεί να είναι:

**αριθμοί  
χαρακτήρες**

τα οποία μπορούν να αναπαρασταθούν από μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων.

**Όμως η δυσκολία βρίσκεται στην  
αναπαράσταση των αρνητικών αριθμών.**

**Έχουν αναπτυχθεί τρεις  
διαφορετικές τεχνικές για την  
αναπαράσταση των αρνητικών  
αριθμών:**

- 1) πρόσημο και μέτρο**
- 2) συμπλήρωμα ως προς ένα**
- 3) συμπλήρωμα ως προς δυο.**

# Πρόσημο και μέτρο

Το **περισσότερο σημαντικό ψηφίο** παριστάνει το πρόσημο του αριθμού,

ενώ τα **υπόλοιπα ψηφία** αναπαριστούν το μέτρο του **δυναμικού αριθμού**.

Ψηφίο του προσήμου είναι 0 ο αριθμός είναι **θετικός**.  
Αν το ψηφίο του προσήμου είναι 1 ο αριθμός είναι **αρνητικός**.

## Παράδειγμα

**+7**

**0 1 1 1**

# Πρόσημο και μέτρο

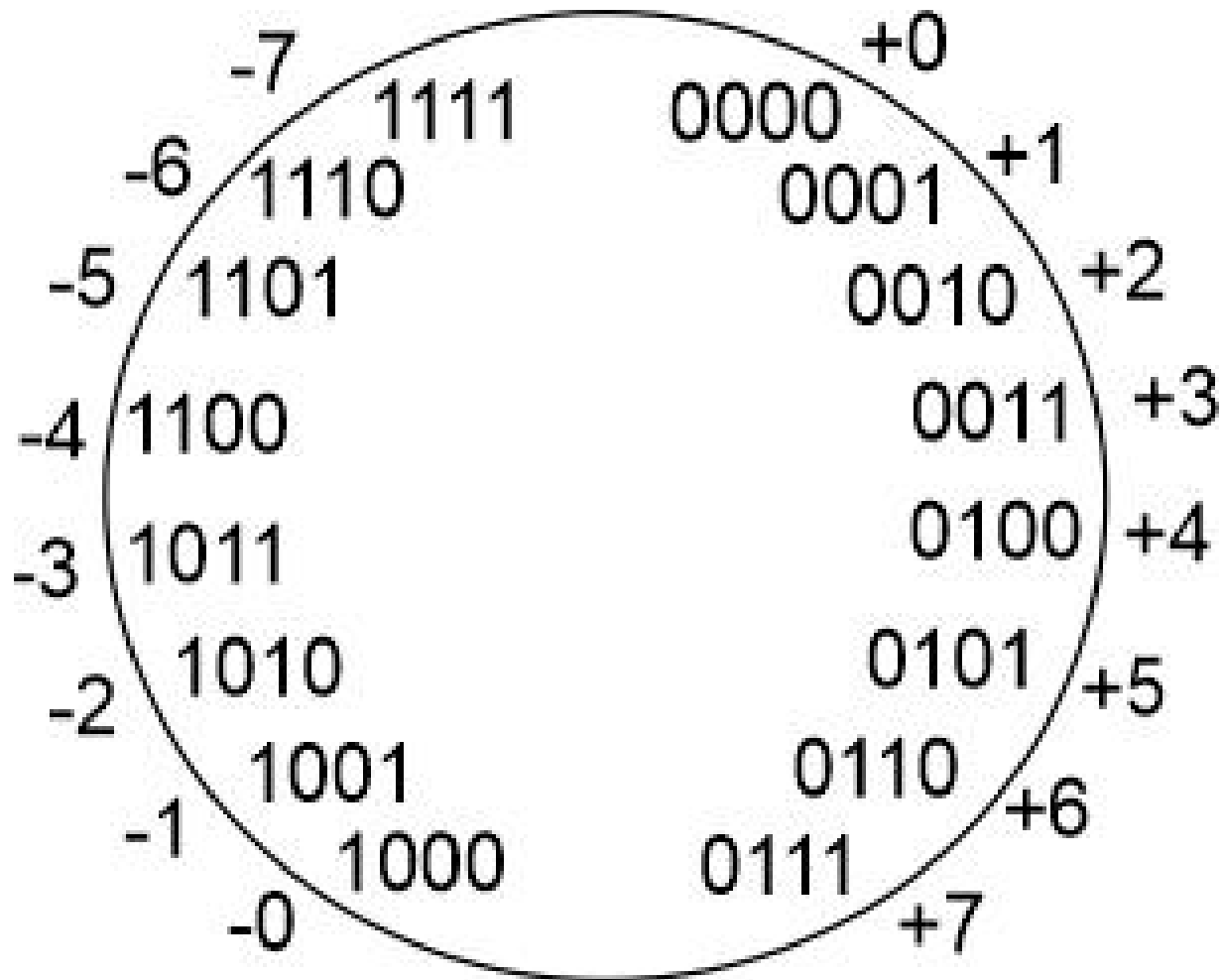
Για να μετατρέψουμε ένα θετικό αριθμό σε αρνητικό, αντικαθιστούμε το ψηφίο του προσήμου 0 με το 1

## Παράδειγμα

+4    0100

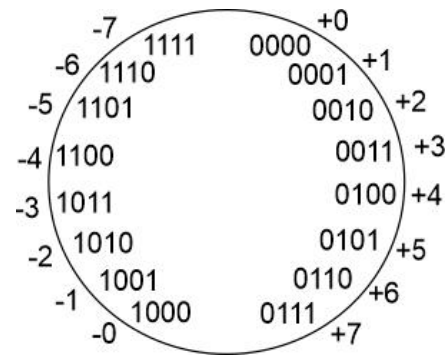
-4    1100

# Πρόσημο και μέτρο



# Πρόσημο και μέτρο

Η πρόσθεση δυο θετικών αριθμών γίνεται με απλό τρόπο. Προσθέτουμε τους αριθμούς και δίνουμε το ίδιο πρόσημο στο αποτέλεσμα.



Όταν τα πρόσημα των δυο αριθμών είναι διαφορετικά, η πρόσθεση γίνεται περίπλοκη. Πρέπει να αφαιρέσουμε το μικρότερο μέτρο από το μεγαλύτερο και έχει πρόσημο αυτό του αριθμού με το μεγαλύτερο μέτρο.

Αυτή η δυσκολία έκανε τους σχεδιαστές ψηφιακών συστημάτων να ανακαλύψουν άλλες **τεχνικές αναπαράστασης των αρνητικών αριθμών** ώστε να κατασκευάζονται απλούστερα κυκλώματα ψηφιακής πρόσθεσης και αφαίρεσης.

# Συμπλήρωμα ως προς 1

Θετικοί αριθμοί και το μηδέν αναπαριστούνται όπως στην αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου.

---

Κάθε αρνητικός αριθμός είναι το συμπλήρωμα ως προς ένα του αντίστοιχου θετικού αριθμού.

---

Το συμπλήρωμα ως προς ένα βρίσκεται με την αντικατάσταση κάθε bit του αριθμού με το συμπλήρωμα του (το συμπλήρωμα του 0 είναι το 1 ενώ εκείνο του 1 είναι το 0).

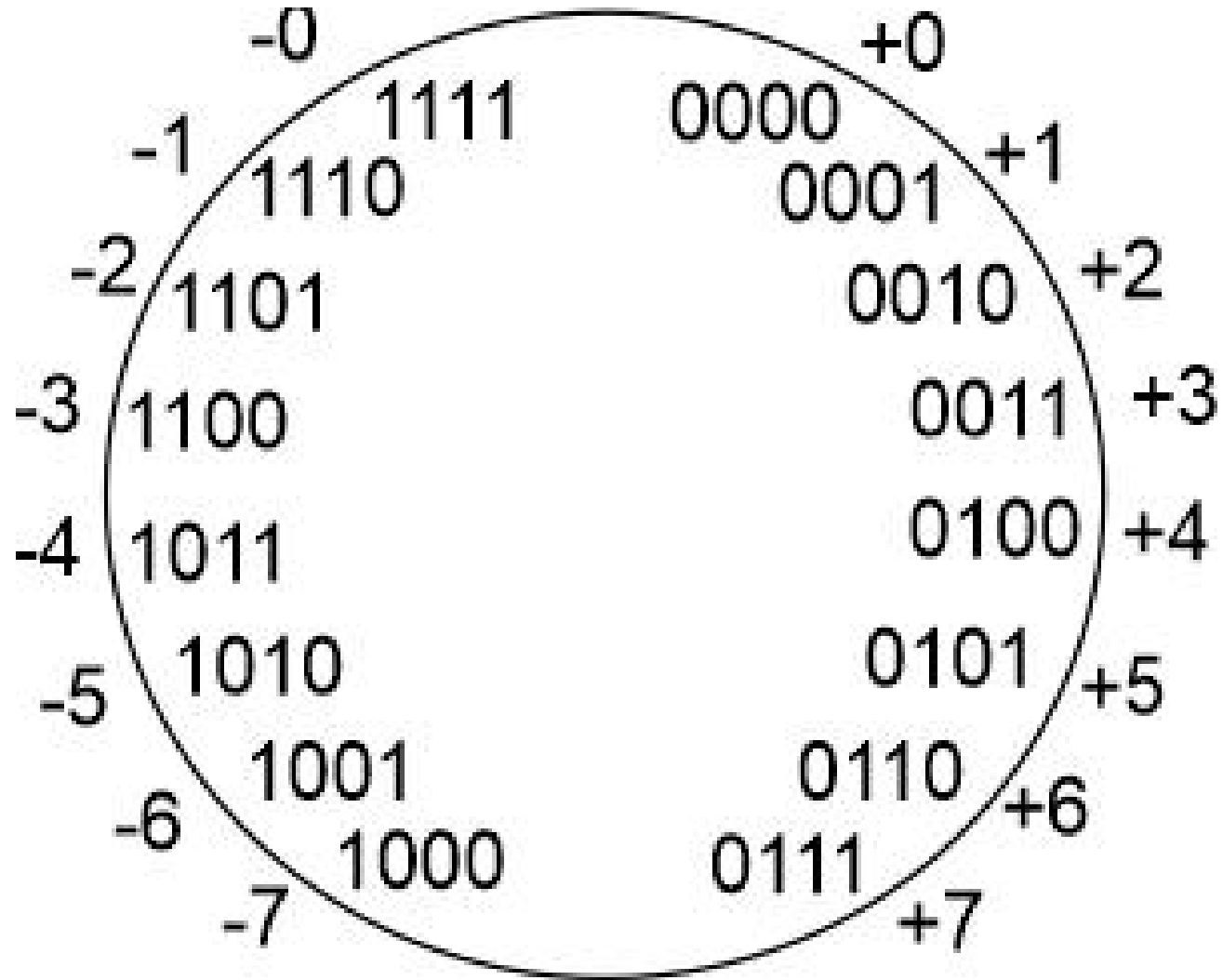
---

## Παράδειγμα

το συμπλήρωμα ως προς ένα του θετικού αριθμού  
 $+7=0111$  είναι ο  $-7=1000$ .



# Συμπλήρωμα ως προς 1



# Συμπλήρωμα ως προς 2

Στην αναπαράσταση του συμπληρώματος ως προς δυο, οι **θετικοί αριθμοί και το μηδέν** αναπαριστώνονται όπως στην αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου.

Κάθε **αρνητικός αριθμός** παριστάνεται με το συμπλήρωμα ως προς δυο του αντίστοιχου θετικού αριθμού.

Στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δυο έχουμε μόνο μια αναπαράσταση για το μηδέν και όχι δυο όπως έχουμε στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα.

Το συμπλήρωμα ως προς δυο βρίσκεται προσθέτοντας το 1 στο συμπλήρωμα ως προς ένα του αριθμού.

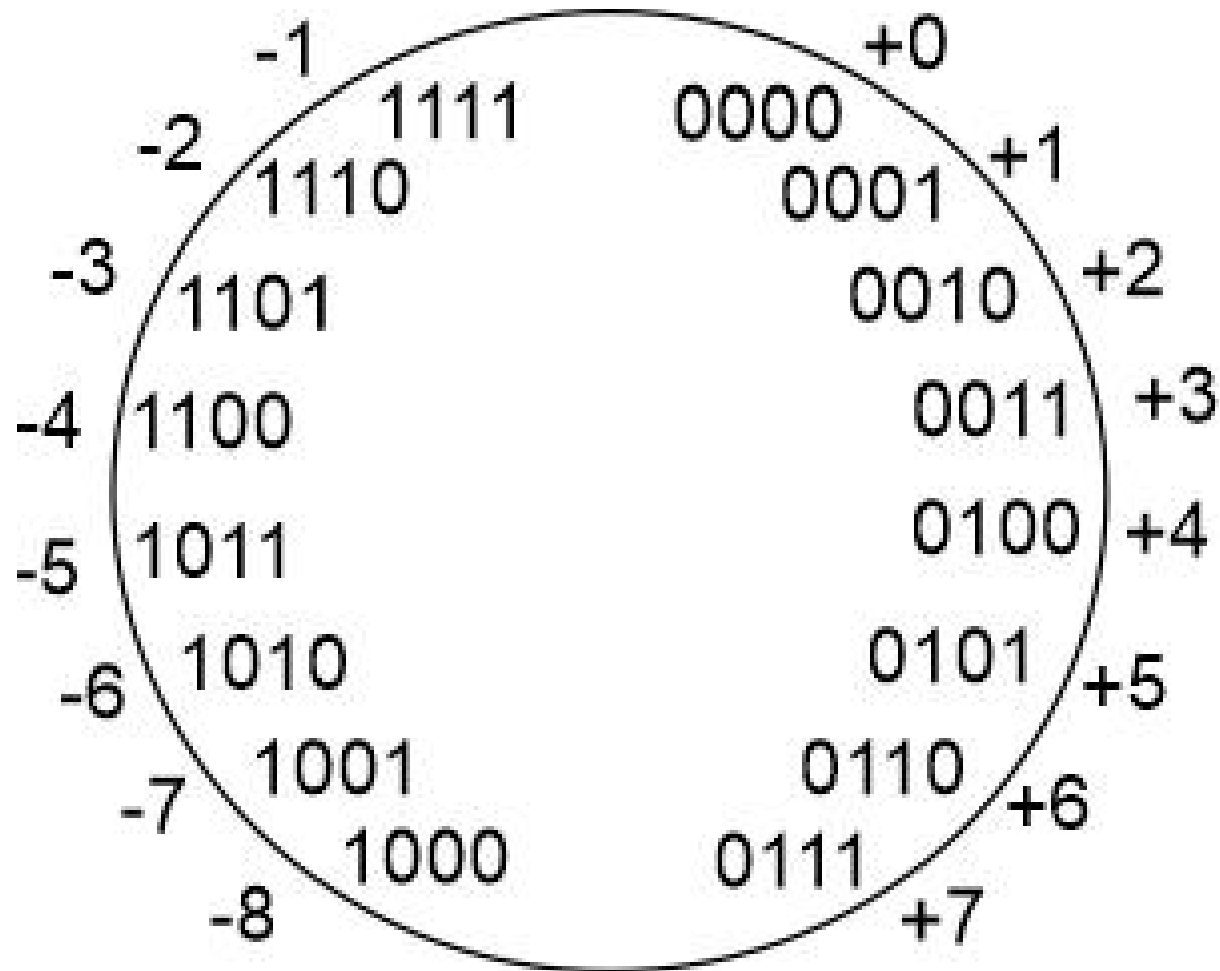
Παράδειγμα

για τον θετικό αριθμό 7 έχουμε  $+7 = 0111$  ενώ το συμπλήρωμα του ως προς ένα είναι 1000

Προσθέτοντας 1 παίρνουμε τον δυαδικό αριθμό 1001 που είναι η αναπαράσταση του αρνητικού αριθμού ως συμπληρώματος ως προς δυο του -7.

$$\begin{array}{r} 1000 \\ + \quad 1 \\ \hline 1001 \end{array}$$

# Συμπλήρωμα ως προς 2



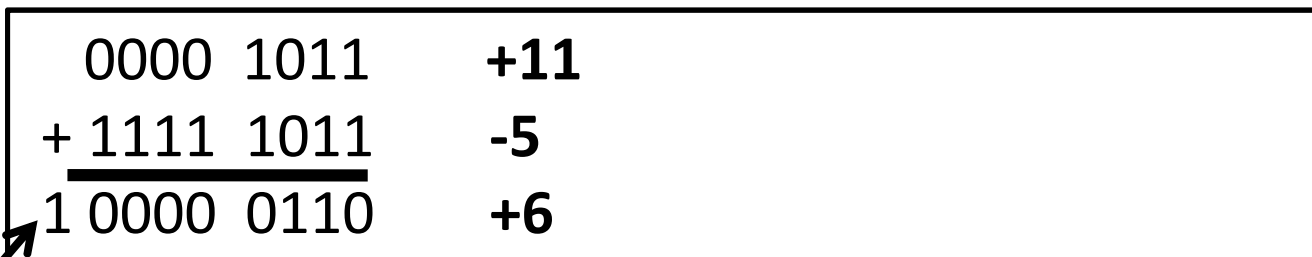
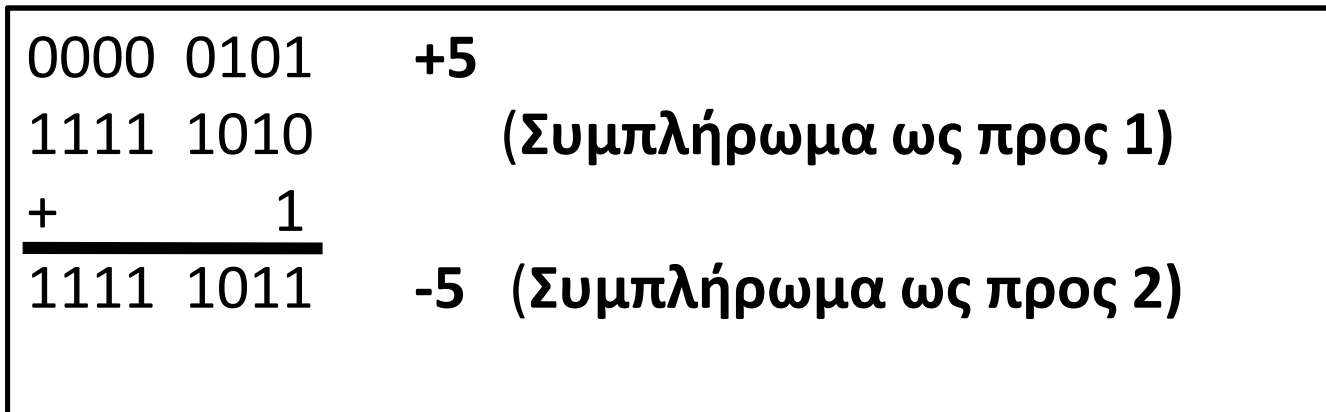
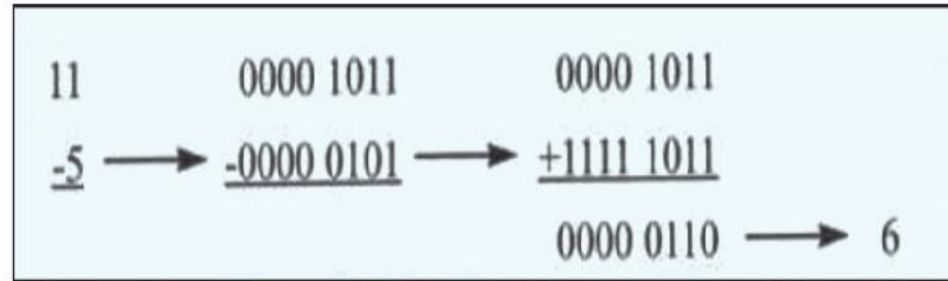
Η παράσταση συμπληρώματος ως προς 2 είναι αυτή που χρησιμοποιείται περισσότερο γιατί:

[1] Υπάρχει μόνο μία αναπαράσταση για τον αριθμό μηδέν.

[2] Διευκολύνει και απλοποιεί πολύ την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων, τόσο για τους θετικούς, όσο και για τους αρνητικούς αριθμούς. **Η αφαίρεση μπορεί να γίνει κάνοντας αρνητικό το δεύτερο αριθμό και προσθέτοντάς τον στον πρώτο.**

Αν και μπορεί να υλοποιηθεί κύκλωμα αφαιρέτη σε υλικό ωστόσο η πράξη της αφαίρεσης γίνεται σχεδόν πάντοτε με το συμπλήρωμα ως προς δύο του αφαιρέτη κάνοντας χρήση του κυκλώματος του αθροιστή. Έτσι χρησιμοποιώντας το ίδιο κύκλωμα τόσο για την πρόσθεση όσο και για την αφαίρεση γίνεται οικονομία χώρου πάνω στο τσιπ ενώ επίσης επιτυγχάνεται ταυτόχρονα και μείωση του κόστους.

Για παράδειγμα  $11-5=11+(-5)$ .



Αγνοείται

- Με το συμπλήρωμα ως προς 2 έχουμε την δυνατότητα να κάνουμε εύκολα πράξεις προσημασμένων ακεραίων στο δυαδικό:
  - Προετοιμάζουμε τους αριθμούς με βάση το μήκος λέξης
  - Οι αρνητικοί απεικονίζονται με συμπλήρωμα ως προς 2
  - Όλες οι πράξεις γίνονται προσθέσεις!
  - Τυχόν κρατούμενο αγνοείται

Άσκηση: Κάνετε τις πράξεις  $15+17$ ,  $15-17$ ,  $-15+17$ ,  $-15-17$  με την τεχνική του συμπληρώματος ως προς 2 σε υπολογιστή με μήκος λέξης 8 δυαδικών ψηφίων. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα στο δεκαδικό σύστημα

Λύση: Προεργασία:

Ο αριθμός 15 είναι: **00001111**

Ο αριθμός 17 είναι: **00010001**

Ο αριθμός -15:

- Ο αριθμός +15 είναι : 00001111
- Το συμπλήρωμα ως προς 1 : 11110000
- Το συμπλήρωμα ως προς 2 : 11110001

Άρα ο αριθμός -15 είναι: **11110001**

Ο αριθμός -17:

- Ο αριθμός +17 είναι : 00010001
- Το συμπλήρωμα ως προς 1 : 11101110
- Το συμπλήρωμα ως προς 2 : 11101111

Άρα ο αριθμός -17 είναι: **11101111**

Συνεπώς:  $(15)_{10} + (17)_{10} =$   
 $(00001111)_2 + (00010001)_2$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 (+) & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Άρα:  $(15)_{10} + (17)_{10} = (00100000)_2 = (32)_{10}$

Συνεπώς:  $-(15)_{10} + (17)_{10} = (-15)_{10} + (17)_{10}$   
 $(11110001)_2 + (00010001)_2$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & \underline{1} \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 (+) & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Άρα:  $(-15)_{10} + (17)_{10} = (00000010)_2 = (2)_{10}$

Συνεπώς:  $(15)_{10} - (17)_{10} = (15)_{10} + (-17)_{10}$   
 $(00001111)_2 + (11101111)_2$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 (+) & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα είναι:  
 11111110  
 Το συμπλήρωμα ως προς 1  
 00000001  
 Το συμπλήρωμα ως προς 2  
 00000010  
 Άρα ο αριθμός στο 10δικό  
 2

Άρα:  $(15)_{10} + (-17)_{10} = (11111110)_2 = (-2)_{10}$

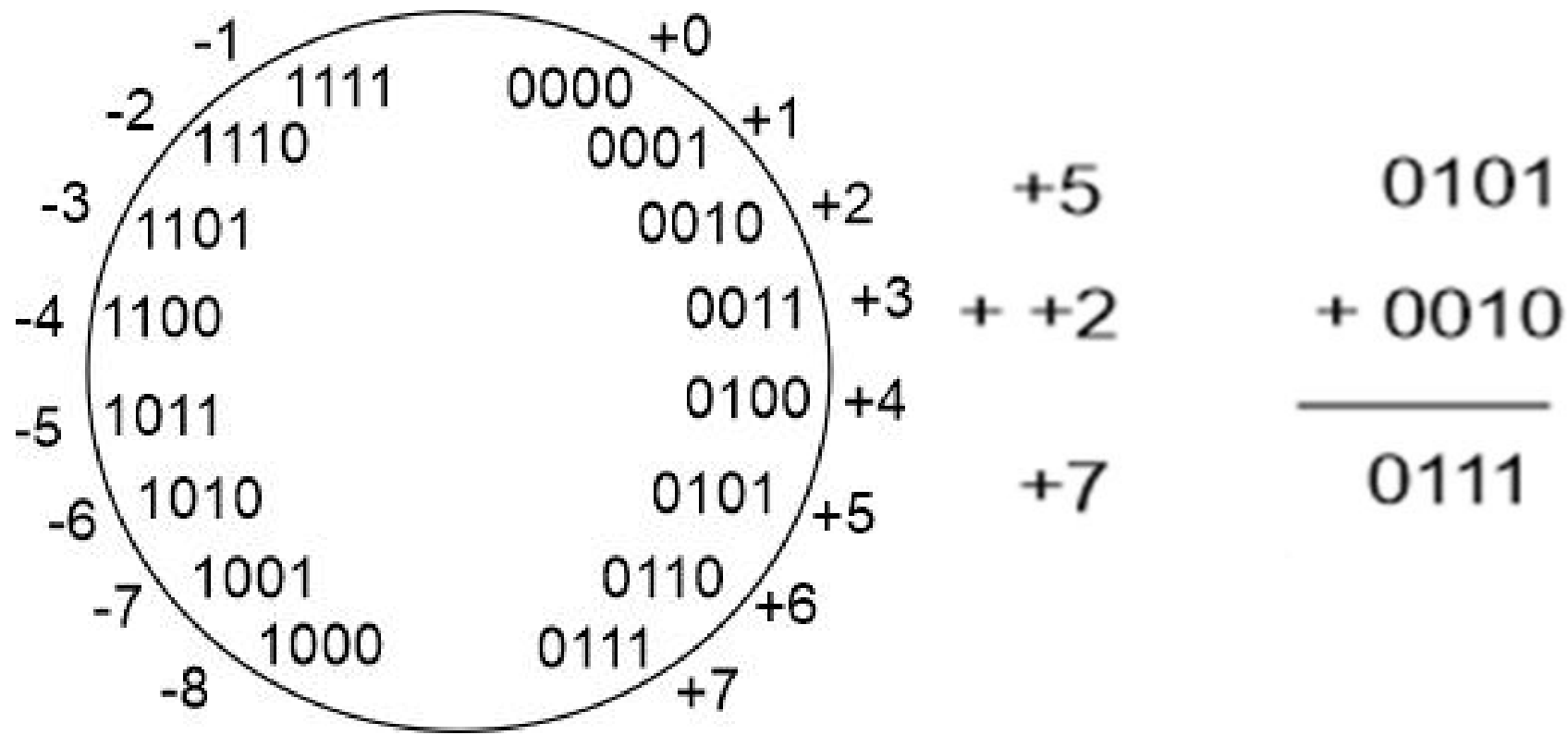
Συνεπώς:  $-(15)_{10} - (17)_{10} = (-15)_{10} + (-17)_{10}$   
 $(11110001)_2 + (11101111)_2$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 (+) & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

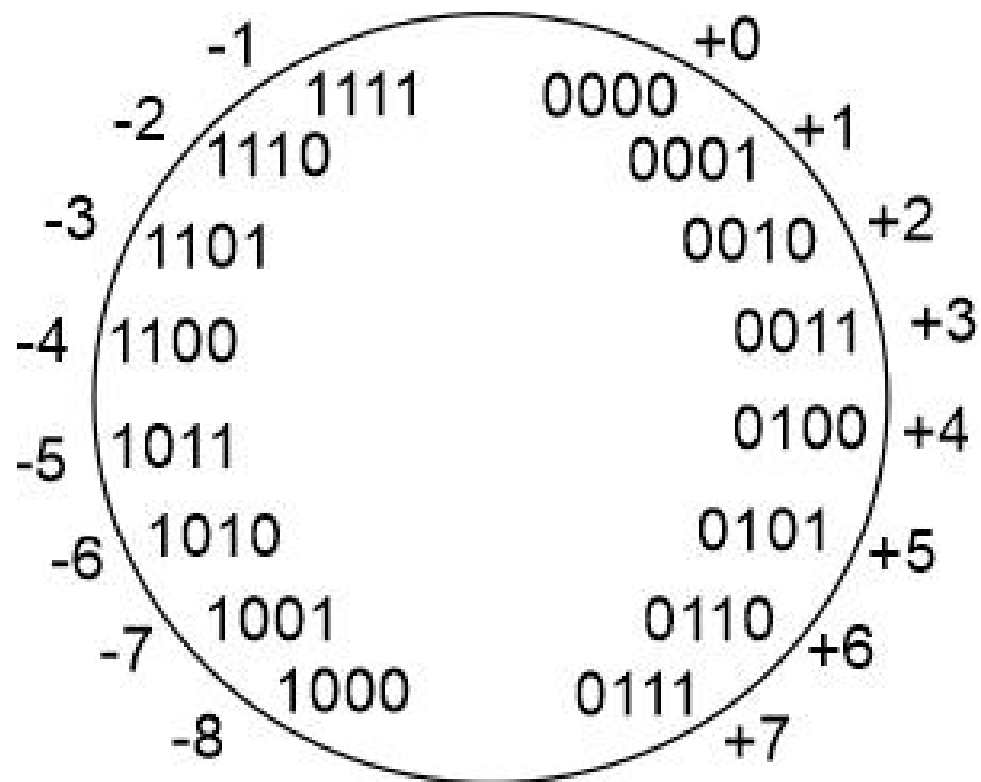
Το αποτέλεσμα είναι:  
 11100000  
 Το συμπλήρωμα ως προς 1  
 00011111  
 Το συμπλήρωμα ως προς 2  
 00100000  
 Άρα ο αριθμός στο 10δικό  
 32

Άρα:  $(-15)_{10} + (-17)_{10} = (11100000)_2 = (-32)_{10}$

Ας κάνουμε τις πράξεις  $5+2$  ,  $5-2$  ,  $-5+2$  ,  $-5-2$

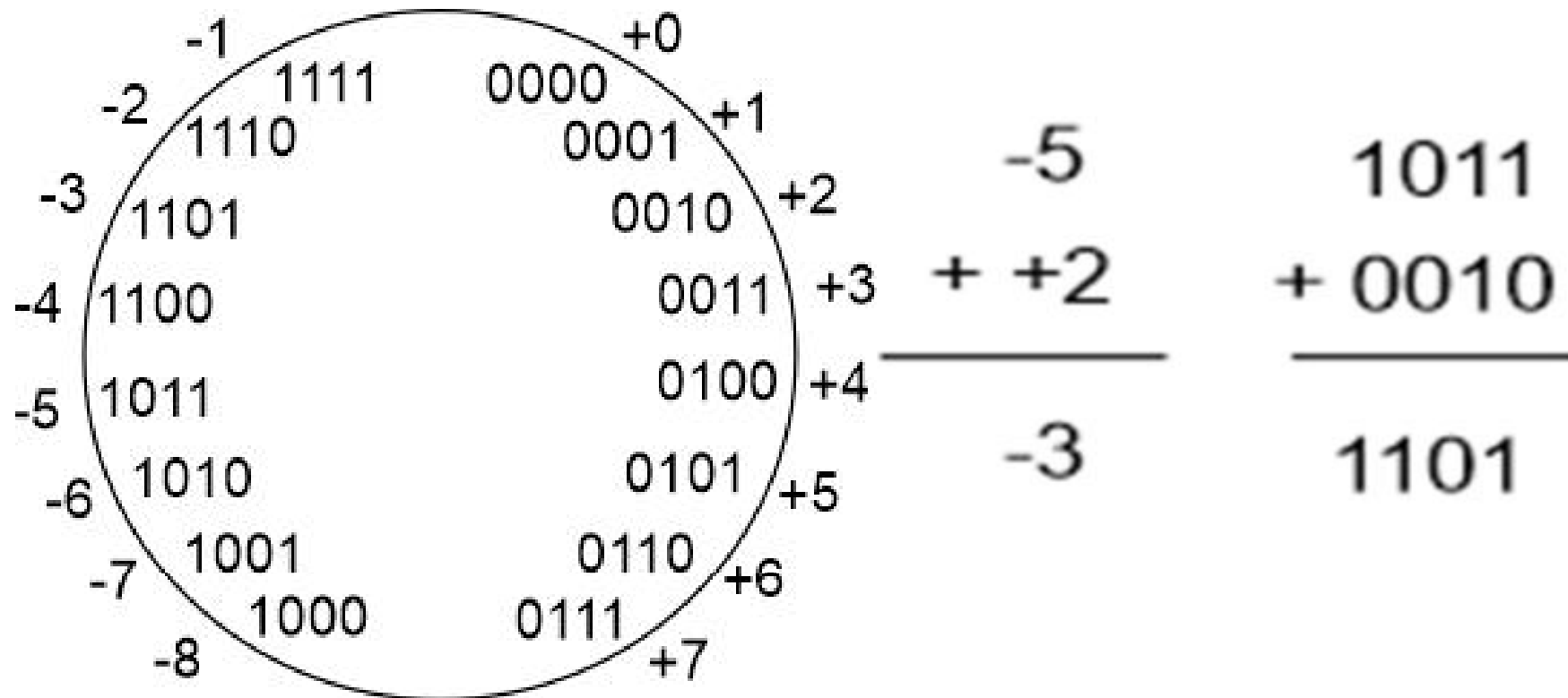






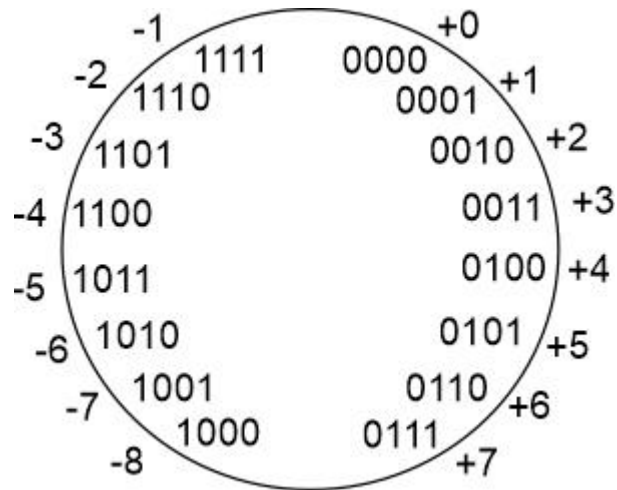
$$\begin{array}{r}
 +5 \\
 + -2 \\
 \hline
 \\
 \hline
 +3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0101 \\
 + 1110 \\
 \hline
 10011 \\
 \hline
 0011
 \end{array}$$



0101 +5  
 1010 Συμπλήρωμα ως 1  
 + 1  
1011 Συμπλήρωμα ως 2  
 Άρα το -5

1101 Αποτέλεσμα  
 0010 Συμπλήρωμα ως 1  
 + 1  
0011 Συμπλήρωμα ως 2  
 Άρα το 3



0010    +2  
 1101    Συμπλήρωμα ως 1  
 +    1  
          
 1110    Συμπλήρωμα ως 2  
 Άρα το -2

0101    +5  
 1010    Συμπλήρωμα ως 1  
 +    1  
          
 1011    Συμπλήρωμα ως 2  
 Άρα το -5

      -5            1011  
  
 + -2            + 1110  
                    
                    
 -7                11001  
  
                    
                    
 1001

1001    Αποτέλεσμα  
 0110    Συμπλήρωμα ως 1  
 +    1  
          
 0111    Συμπλήρωμα ως 2  
 Άρα το 7