Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον και Μαθηματικά: Μια αλγοριθμική προσέγγιση του θεωρήματος Bolzano

Πέρδος Αθανάσιος[1], Σαράφης Ιωάννης[2], Δουκάκης Σπυρίδων[3], Ντρίζος Δημήτριος[4]

[1]Δρ. Καθηγητής Πληροφορικής, Ελληνογαλλική Σχολή «Καλαμαρί», perdos@kalamari.gr
[2]Μαθηματικός, Ελληνογαλλική Σχολή «Καλαμαρί», sarafis@kalamari.gr
[3]Υπ. Διδάκτορας, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, sdoukakis@rhodes.aegean.gr
[4]Σύμβουλος Μαθηματικών Τρικάλων - Καρδίτσας, drizosdim@yahoo.gr

Περίληψη

Η εργασία παρουσιάζει μια διδακτική πρόταση η οποία αποσκοπεί στην ανάπτυξη αλγοριθμικών ικανοτήτων και προγραμματιστικών τεχνικών των μαθητών/τριών της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της τρίτης Λυκείου. Οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή από τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης με το θεώρημα Bolzano, έχουν μελετήσει περιπτώσεις που εφαρμόζεται, αντί - παραδείγματα καθώς και τον ορισμό του ορίου (προσέγγιση τιμής). Έτσι καλούνται να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους στη δομή επιλογής και επανάληψης από το μάθημα της Ανάπτυξης Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (ΑΕΠΠ) ώστε να επιλύσουν αλγοριθμικά, προβλήματα που ανάγονται στην επιτυχία ή όχι του θεωρήματος Bolzano να επιβεβαιώσει την ύπαρξη λύσης για συγκεκριμένες εξισώσεις.

Λέξεις κλειδιά: Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον, Μαθηματικά Γ Λυκείου, Θεώρημα Bolzano

1. Εισαγωγή

Σύμφωνα με το βιβλίο καθηγητή το μάθημα Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (ΑΕΠΠ) [Βακάλη κ.α. (2010)] έχει ως γενικό σκοπό να αναπτύξουν οι μαθητές ικανότητες μεθοδολογικού χαρακτήρα, να αποκτήσουν δεξιότητες αλγοριθμικής προσέγγισης αλλά και να καταστούν ικανοί να υλοποιούν τις λύσεις απλών προβλημάτων με χρήση βασικών προγραμματιστικών τεχνικών. Ως ειδικοί σκοποί του μαθήματος αναφέρονται ότι να είναι ικανοί οι μαθητές να γράφουν έναν αλγόριθμο για ένα πρόβλημα που τους δίνεται, να γνωρίζουν και να επιλέγουν την κατάλληλη δομή για την επίλυση του προβλήματος και να αναπτύξουν ικανότητες αναζήτησης εναλλακτικών λύσεων. Ακόμη στο βιβλίο καθηγητή αναφέρεται ότι η γενική μεθοδολογία διδασκαλίας του μαθήματος θα πρέπει να ενισχύει και να ενθαρρύνει τη δημιουργική δράση του μαθητή μέσω της ενεργοποίησης του και τη συνεργατική μάθηση σε ομαδικό περιβάλλον.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία διδακτική πρόταση η οποία βασίζεται στο θεώρημα Bolzano, το οποίο οι μαθητές διδάσκονται στο πλαίσιο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου [Ανδρεαδάκης κ.α. (2010)]. Η διδασκαλία του θεωρήματος είναι στοχευμένη και περιλαμβάνει παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος, καθώς και αντιπαραδείγματα που αναδεικνύουν ότι οι προϋποθέσεις του θεωρήματος είναι ικανές όχι όμως και αναγκαίες. Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν αλγοριθμικά, κατάλληλες δραστηριότητες που μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα και για αυτό τους παρέχεται ένα φύλλο εργασίας με έξι προτεινόμενα δραστηριότητες στα οποία υπάρχουν και οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων προς μελέτη ώστε να αντιληφθούν καλύτερα το χώρο του προβλήματος. Η διδακτική πρόταση υλοποιείται στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου με τη χρήση του εγκεκριμένου από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (φορέας του Υπουργείου Παιδείας) λογισμικού «Διερμηνευτής της Γλώσσας» ενώ οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των δύο ατόμων.

2. Υλοποίηση της Διδακτικής Πρότασης

2.1 Ορισμός του Ορίου και Σφάλμα Μηχανής

Αρχικά ο εκπαιδευτικός διευκολύνει τους μαθητές να εξηγήσουν, να περιγράψουν και να κατονομάσουν τον ορισμό του μαθηματικού ορίου. Σκοπός είναι οι μαθητές να συσχετίσουν το σφάλμα μηχανής με την προσέγγιση τιμής. Επειδή όμως μέσα στο διδακτικό πακέτο δεν υπάρχει σαφή αναφορά στο σφάλμα μηχανής παρά μόνο ως ερώτηση κρίσης σε δύο δραστηριότητες του τετραδίου μαθητή [Βακάλη κ.α. (2010), σ. 96], παρουσιάζεται και επεξηγείται ένας αλγόριθμος εύρεσης του σφάλματος.

Ο αλγόριθμος που δίνεται είναι ο εξής:

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Σφάλμα
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
  ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: β
ΑΡΧΗ
  β <- 1
  ΟΣΟ 1 + β <> 1 ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
    β <- β / 2
  ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
  ΓΡΑΨΕ 'το σφάλμα της μηχανής είναι', β * 2
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

Η συνθήκη συνέχειας (1 + β <> 1) αρχικά οδηγεί τους μαθητές στην παρατήρηση ότι είναι πάντοτε αληθής οπότε η δομή επανάληψης δεν τερματίζεται ποτέ. Με την εκτέλεση όμως του προγράμματος διαπιστώνουν ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή η 0.000000000000000222 ή 2,22 x 10^{-16} η οποία αποτελεί τη μικρότερη τιμή που μπορεί να θεωρήσει ο υπολογιστής διάφορη του μηδέν σε μία πράξη πρόσθεσης. Έτσι συνειδητοποιούν ότι υπάρχει ένα όριο στις αριθμητικές τιμές που μπορεί να διαχειρισθεί ο υπολογιστής [Στεφανίδης κ.α. (1999)].

2.2 Θεώρημα Bolzano

Στη συνέχεια οι μαθητές/τριες καλούνται να εξηγήσουν και να περιγράψουν το θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο:

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα [α, β] είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει f(α)·f(β) < 0 τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση f(x) = 0 έχει στο (α, β) μια τουλάχιστον λύση.

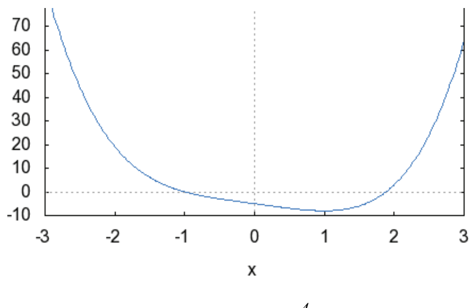
Κατόπιν δίνεται στους μαθητές κατάλληλο φύλλο εργασίας με έξι δραστηριότητες κλιμακούμενης δυσκολίας μαζί με τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων προς μελέτη [Καλομητσίνης (2001)].

2.3 Φύλλο εργασίας

Το φύλλο εργασίας, όπως ήδη αναφέρθηκε, περιλαμβάνει πέρα από τις δραστηριότητες και τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν επαρκώς το χώρο του προβλήματος.

Δραστηριότητα 1

Με βάση τη γενίκευση του θεωρήματος Bolzano, να γράψετε πρόγραμμα το οποίο να διαβάζει το κάτω και το άνω όριο ενός διαστήματος και να ελέγχει αν η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x - 5$ έχει στο συγκεκριμένο διάστημα τη ρίζα της, εμφανίζοντας κατάλληλο μήνυμα. Η συνάρτηση έχει μόνο μία ρίζα και είναι συνεχής στο R.



Εικόνα 1. *$f(x) = x^4 - 4x - 5$*

Ένας προτεινόμενος αλγόριθμος που επιλύει την δραστηριότητα 1 είναι ο ακόλουθος:

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Bolzano1
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: α, β
ΑΡΧΗ
 ΓΡΑΨΕ 'δώσε το κάτω άκρο'
 ΔΙΑΒΑΣΕ α
 ΓΡΑΨΕ 'δώσε το πάνω άκρο'
 ΔΙΑΒΑΣΕ β
 ΑΝ (α^4 + 4*α - 5)*(β^4 + 4*β - 5) < 0 ΤΟΤΕ
   ΓΡΑΨΕ 'υπάρχει λύση στο διάστημα [', α, ',', β, ']'
 ΑΛΛΙΩΣ
   ΓΡΑΨΕ 'δεν υπάρχει λύση στο διάστημα [', α, ',', β, ']'
 ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

Σκοπός της συγκεκριμένης δραστηριότητας είναι να επιδείξουν οι μαθητές τις γνώσεις τους στη δομή επιλογής αλλά και στην εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano.

<u>Δραστηριότητα 2</u>

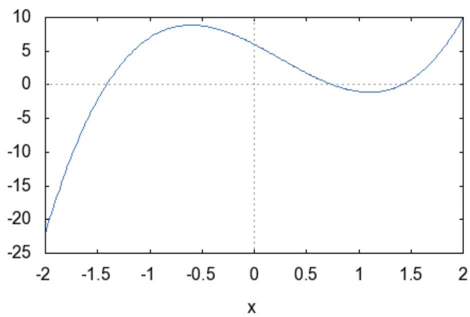
Με βάση τη γενίκευση του θεωρήματος Bolzano, να γράψετε πρόγραμμα το οποίο να διαβάζει το κάτω και το άνω όριο ενός διαστήματος και να ελέγχει αν υπάρχουν δύο ρίζες της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 6$ στο συγκεκριμένο διάστημα. Το πρόγραμμα να σταματά το έλεγχο αν βρει δύο διαστήματα με ακρίβεια δεκάτου που υπάρχουν ρίζες, και στη συνέχεια να τα εμφανίζει με κατάλληλο μήνυμα. Διαφορετικά να εμφανίζει μήνυμα ότι δεν υπάρχουν δύο λύσεις στο αρχικό διάστημα. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο R.

Ένας προτεινόμενος αλγόριθμος που επιλύει την δραστηριότητα_2 είναι ο ακόλουθος:

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Bolzano2
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: α, β, α1, α2, β1, β2, χ
 ΑΚΕΡΑΙΕΣ: π
ΑΡΧΗ
 ΓΡΑΨΕ 'δώσε το κάτω άκρο'
 ΔΙΑΒΑΣΕ α
 ΓΡΑΨΕ 'δώσε το πάνω άκρο'
 ΔΙΑΒΑΣΕ β
 π <- 0
 χ <- α
 ΟΣΟ π < 2 ΚΑΙ χ < β ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
  ΑΝ (4*χ^3 - 3*χ^2 - 8*χ + 6)*(4*(χ + 0.1)^3 - 3*(χ + 0.1)^2
   & - 8*(χ + 0.1) + 6) < 0 ΤΟΤΕ
   π <- π + 1
```

```
      ΑΝ π = 1 ΤΟΤΕ
        α1 <- χ
        β1 <- χ + 0.1
      ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ π = 2 ΤΟΤΕ
        α2 <- χ
        β2 <- χ + 0.1
      ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    χ <- χ + 0.1
  ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
  ΑΝ π = 2 ΤΟΤΕ
    ΓΡΑΨΕ 'υπάρχει μία λύση στο διάστημα [', α1, ',', β1, ']'
    ΓΡΑΨΕ 'υπάρχει δεύτερη λύση στο διάστημα [', α2, ',', β2, ']'
  ΑΛΛΙΩΣ
    ΓΡΑΨΕ 'δεν υπάρχουν δύο λύσεις στο διάστημα [', α, ',', β, ']'
  ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

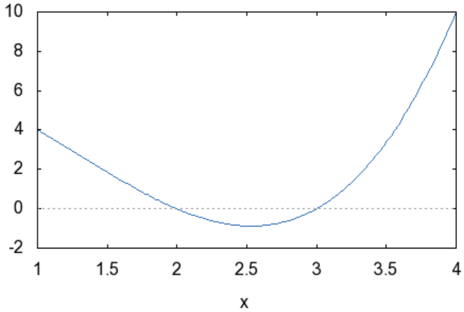
Με την δεύτερη δραστηριότητα ελέγχεται η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιήσουν μία εντολή επανάληψης για άγνωστο αριθμό επαναλήψεων καθώς και η ικανότητα τους στη χρήση της δομής επιλογής. Η γραφική παράσταση που συνοδεύει την δραστηριότητα είναι η ακόλουθη:



Εικόνα 2. *$f(x) = 4x^3 – 3x^2 – 8x + 6$*

<u>Δραστηριότητα 3</u>

Με βάση το θεώρημα Bolzano, να γράψετε πρόγραμμα το οποίο να ελέγχει αν υπάρχει ρίζα για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 – 4x^2 + x + 6$ στο διάστημα [1, 4] εμφανίζοντας κατάλληλο μήνυμα. Στη συνέχεια για την παραπάνω συνάρτηση να γίνεται έλεγχος με βήμα 0,1 αν στο συγκεκριμένο διάστημα μηδενίζεται και να εμφανίζονται με κατάλληλο μήνυμα τυχόν τιμές του x που συμβαίνει αυτό. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο R. Τι παρατηρείτε;



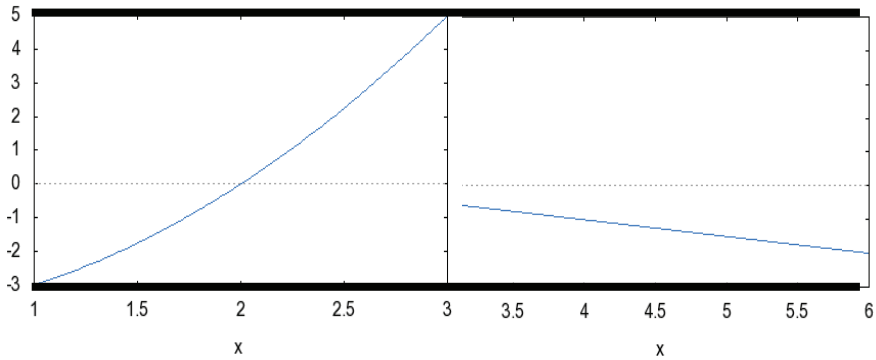
Εικόνα 3. *$f(x) = x^3 – 4x^2 + x + 6$*

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα αποτελεί ένα αντιπαράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος Bolzano. Οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν την εντολή επανάληψης **Για…από…μέχρι** με βήμα 0.1 ώστε να βρουν λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα [1, 4] και να επαληθεύσουν ότι οι προϋποθέσεις του θεωρήματος είναι ικανές όχι όμως και αναγκαίες.

Ίδιος είναι και ο διδακτικός στόχος της επόμενης δραστηριότητας. Απλά στην προηγούμενη το αντιπαράδειγμα σχετίζονταν με το πρόσημο του γινόμενου ενώ τώρα σχετίζεται με την ασυνέχεια της συνάρτησης.

Δραστηριότητα 4

Να γράψετε πρόγραμμα το οποίο θα βρίσκει τις ρίζες της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2\text{-}4 & 1\le x\le 3 \\ -\dfrac{1}{2}x+1 & 3<x\le 6 \end{cases}$ στο διάστημα που ορίζεται δίνοντας στο x τιμές με βήμα 0.1. Τι παρατηρείτε;



Εικόνα 4. *Γραφική παράσταση τέταρτης δραστηριότητας*

Η περίπτωση ασυνεχούς συνάρτησης η οποία έχει όμως λύση σε συγκεκριμένο διάστημα μελετάται και στην δραστηριότητα 5.

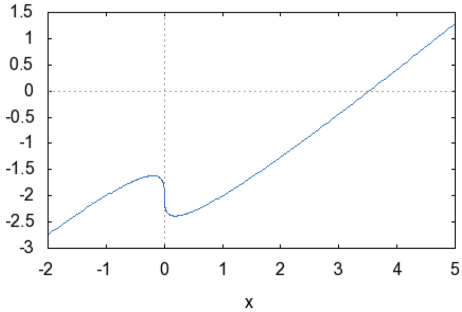
Δραστηριότητα 5

Να γράψετε πρόγραμμα το οποίο θα βρίσκει τις ρίζες της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\ln x & 0.4 \le x \le 2\\ e^{x/2}-4 & 2<x \le 3.6\end{cases}$ στο διάστημα που ορίζεται δίνοντας στο x τιμές με βήμα 0.2 Σε περίπτωση που δεν βρεθεί ρίζα σε κάποια από τους δύο τύπους της συνάρτησης να βρείτε σε ποιο από τα διαστήματα πλάτους 0.2 υπάρχει λύση, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bolzano. Τι παρατηρείτε;

Τέλος η έκτη δραστηριότητα καλεί τους μαθητές να αναπτύξουν αλγόριθμο ο οποίος θα βρίσκει μία προσεγγιστική λύση για μία δεδομένη εξίσωση. Η δραστηριότητα προτρέπει τους μαθητές και τις μαθήτριες να λάβουν υπόψη το σφάλμα μηχανής στην ανάπτυξη του αλγορίθμου ώστε να αποφύγουν τυχόν λάθη που οφείλονται σε αυτό. Δίνει επίσης το έναυσμα για μία συζήτηση σχετικά με την αναπαράσταση των αριθμών και την κωδικοποίηση τους από την υπολογιστή. Βέβαια η συζήτηση ξεφεύγει από την προβλεπόμενη διδακτέα ύλη αλλά είναι χρήσιμη για την καλύτερη κατανόηση του αλγορίθμου.

Δραστηριότητα 6

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-x^{\frac{1}{3}}-2$.



Εικόνα 5. *Γραφική παράσταση έκτης δραστηριότητας*

Όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση υπάρχει ρίζα της f μεταξύ του 3 και του 4, διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής. Να γράψετε πρόγραμμα στη ΓΛΩΣΣΑ το οποίο θα εφαρμόζει το θεώρημα Bolzano ώστε να βρίσκει την καλύτερη δυνατή προσεγγιστικά τιμή του x για την οποία η συνάρτηση μηδενίζεται. Το πρόγραμμα ξεκινώντας από το αρχικό διάστημα, να το διαιρεί σε 10 μικρότερα και να βρίσκει ποιο από αυτά ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος εμφανίζοντας το μήνυμα «υπάρχει λύση στο [α, β]» όπου α και β οι τιμές των άκρων του διαστήματος.

Η παραπάνω διαδικασία να ακολουθείται μέχρι να βρεθεί η καλύτερη δυνατή προσεγγιστικά λύση. Για την εύρεση της λύσης επειδή για τιμές μικρότερες του σφάλματος μηχανής δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν αριθμητικές πράξεις να ληφθούν υπόψη τα εξής:

- Να ελέγχεται το πρόσημο των f(α) και f(β) αν είναι διαφορετικό κάθε φορά και όχι αν το γινόμενο τους είναι αρνητικό.
- Να θεωρηθεί ως καλύτερη δυνατή προσεγγιστικά λύση η τιμή του x για την οποία ο διερμηνευτής θεωρεί τις τιμές των f(α) και f(β) πρακτικά ίσες.

Να τροποποιήσετε το πρόγραμμα σας, ελέγχοντας αν το γινόμενο των f(α) και f(β) είναι αρνητικό με βάση το θεώρημα Bolzano και όχι αν το πρόσημο τους είναι διαφορετικό. Τι παρατηρείτε και πως το εξηγείτε;

Η τελευταία τροποποίηση της δραστηριότητας ζητείται με σκοπό να γίνει η σχετική συζήτηση για την αναπαράσταση των αριθμών σε επίπεδο γλώσσας μηχανής. Επιπλέον οι μαθητές διαπιστώνουν ότι αν ένας αριθμός είναι μικρότερος από το σφάλμα μηχανής (στη συγκεκριμένη περίπτωση το γινόμενο f(α)·f(β)) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αφού πρακτικά θεωρείται μηδέν. Ένα άλλο σημείο που πρέπει να αναφερθεί είναι ότι η εύρεση της προσεγγιστικής λύσης θα μπορούσε να γίνει με τη μέθοδο της διχοτόμησης. Όμως επειδή η συγκεκριμένη μέθοδος δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη της ΑΕΠΠ [Βακάλη κ.α. (2010)] προτιμήθηκε η αρχική μεθοδολογία. Μπορεί όμως ο εκπαιδευτικός που θα εντάξει τη διδακτική πρόταση στη διδασκαλία του, να τροποποιήσει την δραστηριότητα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης.

Μία ενδεικτική αλγοριθμική λύση της παραπάνω δραστηριότητας που υλοποιήθηκε στο Διερμηνευτή της γλώσσας είναι η εξής:

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Bolzano6
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: fa, fb, χ_αρ, χ_δ, δχ
 ΛΟΓΙΚΕΣ: βρέθηκε, πα, πβ
ΑΡΧΗ
 ΓΡΑΨΕ 'λύση της εξίσωσης f(χ) = χ - χ^(1/3) - 2 = 0'
 χ_αρ <- 3
 βρέθηκε <- ΨΕΥΔΗΣ
 δχ <- 0.1
 ΟΣΟ βρέθηκε = ΨΕΥΔΗΣ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
  χ_δ <- χ_αρ + δχ
  fa <- χ_αρ - χ_αρ^(1/3) - 2
  fb <- χ_δ - χ_δ^(1/3) - 2
  πα <- fa > 0
  πβ <- fb > 0
  ΑΝ πα <> πβ ΤΟΤΕ
```

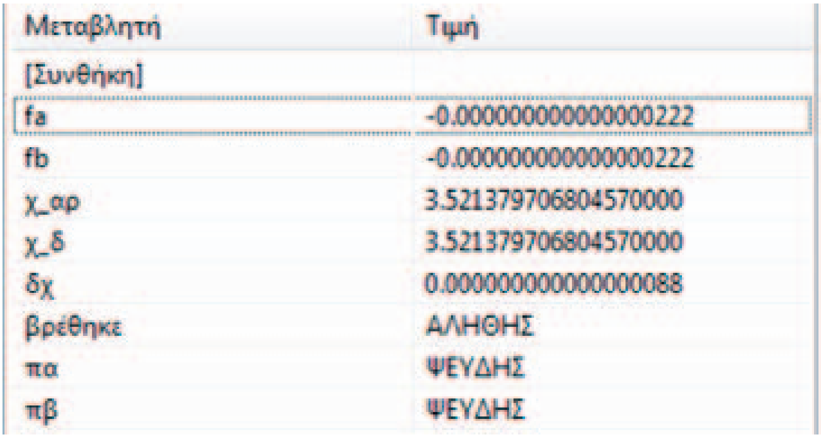
```
    ΓΡΑΨΕ 'υπάρχει λύση στο [', χ_αρ, ',', χ_δ, ']'
    δχ <- (χ_δ - χ_αρ)/ 10
   ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ fa = fb ΤΟΤΕ
    ΓΡΑΨΕ 'καλύτερη δυνατόν προσεγγιστική λύση η ', χ_δ
    βρέθηκε <- ΑΛΗΘΗΣ
   ΑΛΛΙΩΣ
    χ_αρ <- χ_δ
   ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
  ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
  ΔΙΑΒΑΣΕ δχ !απλά για να διακοπεί η εκτέλεση
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

Στην οθόνη εκτέλεσης εμφανίζονται τα εξής:

```
λύση της εξίσωσης f(χ) = χ - χ^(1/3) - 2 = 0
υπάρχει λύση στο [3.500000000000000000, 3.600000000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.520000000000000000, 3.530000000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.521000000000000000, 3.522000000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.521300000000000000, 3.521400000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.521370000000000000, 3.521380000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.521379000000000000, 3.521380000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.521379700000000000, 3.521379800000000000]
υπάρχει λύση στο [3.521379700000000000, 3.521379710000000000]
υπάρχει λύση στο [3.521379706000000000, 3.521379707000000000]
υπάρχει λύση στο [3.521379706800000000, 3.521379706900000000]
υπάρχει λύση στο [3.521379706800000000, 3.521379706810000000]
υπάρχει λύση στο [3.521379706804000000, 3.521379706805000000]
υπάρχει λύση στο [3.521379706804500000, 3.521379706804600000]
υπάρχει λύση στο [3.521379706804560000, 3.521379706804570000]
υπάρχει λύση στο [3.521379706804570000, 3.521379706804570000]
καλύτερη δυνατόν προσεγγιστική λύση η 3.521379706804570000
```

Εικόνα 6. *Οθόνη εκτέλεσης της έκτης δραστηριότητας*

Πέρα όμως από την οθόνη εκτέλεσης οι μαθητές στην οθόνη παρακολούθησης των μεταβλητών παρατηρούν ότι η καλύτερη προσεγγιστική λύση προκύπτει όταν οι τιμές γίνονται μικρότερες ή ίσες του σφάλματος μηχανής.



Μεταβλητή	Τιμή
[Συνθήκη]	
fa	-0.000000000000000222
fb	-0.000000000000000222
χ_αρ	3.521379706804570000
χ_δ	3.521379706804570000
δχ	0.000000000000000088
βρέθηκε	ΑΛΗΘΗΣ
πα	ΨΕΥΔΗΣ
πβ	ΨΕΥΔΗΣ

Εικόνα 7. *Οθόνη παρακολούθησης των μεταβλητών*

3.Μελλοντική Εργασία

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση θα υλοποιηθεί και την τρέχουσα σχολική χρονιά με τη συνεργασία του καθηγητή των μαθηματικών και της πληροφορικής. Είναι θετικό ότι η επεξεργασία του θεωρήματος Bolzano στο μάθημα των μαθηματικών συμπίπτει με την ολοκλήρωση της παρουσίασης των δομών επιλογής και επανάληψης στο μάθημα ΑΕΠΠ. Επίσης θα δοθεί ένα ερωτηματολόγιο στους μαθητές ώστε να αξιολογηθεί η πρόταση και ο στόχος της ο οποίος είναι να εμπλέξει τους μαθητές σε μία δημιουργική διαδικασία μάθησης και ανάπτυξης αναπαραστάσεων για τα μαθήματα ΑΕΠΠ και Μαθηματικών Κατεύθυνσης. Έτσι η διεπιστημονικότητα που προάγεται με την πρόταση, δείχνει στους μαθητές/τριες το λόγο της αξιοποίησης των υπολογιστών από την επιστήμη των Μαθηματικών και αναδεικνύει το βαθμό αλληλεξάρτησης των δύο επιστήμων.

Αναφορές

1. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ. & Πολύζος Γ. (2010), *Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
2. Βακάλη Α., Γιαννόπουλος Η., Ιωαννίδης Χ., Κοίλιας Χ., Μάλαμας Κ., Μανωλόπουλος Ι. & Πολίτης Π. (2010), *Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον*, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

3. Καλομητσίνης Σ. (2001), *Επιλογή Ασκήσεων από τη διεθνή βιβλιογραφία – Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης,* Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.
4. Στεφανίδης Γ. & Σαμαράς Ν. (1999), *Υπολογιστικές Μέθοδοι με το MATLAB*, Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη.

Abstract

This paper presents a teaching proposal for the course 'Application Development in Programming Environment' that aims to help students of third class in Greek Lyceum to develop algorithmic skills and programming techniques. The proposal is based on the theorem of Bolzano. The students have been taught this theorem in the mathematics classroom and are asked to explore equations so as to apply the theorem in a programming environment.

Keywords: Algorithms, Mathematics, Bolzano Theorem.