ΜΕΝΕΛΑΟΣ Ο ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΝΟΣ
ΕΝΑΣ ΞΕΧΑΣΜΕΝΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Δόρτσιος Κων/νος, Μαθηματικός, kdortsi@sch.gr, Κινητό: 6946384148

Περίληψη

Με δεδομένο πως η Γεωμετρία στο σχολικό πρόγραμμα των σχολείων στη χώρα μας έχει υποβαθμιστεί σε βαθμό ανησυχητικό, η εργασία αυτή έρχεται να ανασύρει από τη λήθη ένα σημαντικό θεώρημα που έτσι κι αλλιώς αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για όποιον αποφασίσει να ασχοληθεί με τον κλάδο αυτό των Μαθηματικών.

Ακόμα, στις σελίδες που ακολουθούν, καταβάλλεται προσπάθεια ώστε το Θεώρημα του Μενελάου να παρουσιαστεί με τις διάφορες μορφές του καθώς και την αντίστοιχη ιστορία του. Ο μαθηματικός Μενέλαος ο οποίος έζησε τον 1^{o} με 2^{o} αιώνα μ. Χ. φαίνεται από τις διάφορες μαρτυρίες πως έχει την πατρότητα του θεωρήματος αυτού.

Το θεώρημα αυτό αναλύεται στην μορφή που το συναντά κανείς στην επιπεδομετρία, καθώς και στη Στερεομετρία. Η χρήση του στα σφαιρικά τρίγωνα παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Τέλος η χρήση λογισμικών επιπεδομετρίας και στερεομετρίας του Cabri II, 3D, συνεπικουρούν στη παρουσίαση με αποτελεσματικό τρόπο.

Εισαγωγή

Είναι αλήθεια πως στη σημερινή εποχή στη χώρα μας, την εποχή της τρέχουσας και εφήμερης πληροφόρησης, της κρίσης των θεσμών και αξιών καθώς και της γενικότερης υποβάθμισης της κλασσικής παιδείας τα μαθηματικά δεν έμειναν αλώβητα.

Η εισαγωγή νέων μαθημάτων στο ημερήσιο πρόγραμμα του σχολείου, κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δημιούργησε ασφυκτική κατάσταση με αποτέλεσμα οι ώρες των μαθηματικών να μειώνονται. Αν λάβει κανείς ως δεδομένο πως τα μαθηματικά είναι η προϋπόθεση και η βάση από την οποία ξεκινά κάθε άλλη ανθρώπινη δραστηριότητα, θα έπρεπε να συμβαίνει το αντίθετο. Κι όμως!

Η πίεση αυτή έφερε ως αποτέλεσμα τα νεώτερα διδακτικά βιβλία ακολουθώντας τα νέα αναλυτικά προγράμματα να προσαρμόζονται συνεχώς στα νέα δεδομένα με αποτέλεσμα να καταλήγουν σε συνεχείς περικοπές σημαντικών και ουσιωδών θεμάτων.

Από την άλλη μεριά το εξεταστικό σύστημα για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση δημιούργησε επιπρόσθετο τραύμα στη διδασκαλία των μαθηματικών βγάζοντας οριστικά τη Γεωμετρία στο περιθώριο και στην υποβάθμιση.

Σήμερα ένας μαθητής, κι ας είναι ο πιο επιμελής και δραστήριος, τη Γεωμετρία την έχει πλέον στείλει στα «αζήτητα». Από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου έχει ξεκάθαρα πεισθεί πως για τη Γεωμετρία δε θα ερωτηθεί σχεδόν ποτέ. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να οδηγείται το μάθημα αυτό στο περιθώριο και στην απαξίωση παρόλο που η χώρα μας ήταν η πρώτη που έβαλε τα θεμέλια της Γεωμετρίας και μάλιστα γερά και ακλόνητα.**[1]**

Έτσι σήμερα η Γεωμετρία υπάρχει στο πρόγραμμα στερημένη όχι μόνον από το άλλο μισό της που είναι η Στερεομετρία αλλά και από πολλά και σημαντικά θεωρήματα. Η Στερεομετρία υπάρχει βέβαια στις σελίδες των διδακτικών βιβλίων της Γεωμετρίας, όμως είναι κοινό μυστικό πως στα περισσότερα σχολεία δε διδάσκεται.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε ένα τέτοιο θεώρημα που σήμερα υπάρχει στο περιθώριο της σχολικής πραγματικότητας. Το θεώρημα αυτό είναι το θεώρημα του Μενελάου.

Α. Μενέλαος ο Αλεξανδρινός

Ο Μενέλαος, υπήρξε ένας μεγάλος μαθηματικός της ελληνικής αρχαιότητας ο οποίος έζησε κατά τον πρώτο με δεύτερο αιώνα μετά τη γέννηση του Χριστού. Σήμερα εκείνο που γνωρίζουμε σχετικά με το χρονικό διάστημα που έζησε είναι πως το 98 μ.Χ. στα χρόνια κυριαρχίας του αυτοκράτορα Τραϊανού βρίσκεται στη Ρώμη κάνοντας αστρονομικές παρατηρήσεις.

Την πληροφορία αυτή μας την παρέχει ***ο Κλαύδιος Πτολεμαίος*** ο οποίος έζησε λίγο αργότερα από τον Μενέλαο στο βιβλίο του «Μαθηματική Σύνταξις» στο οποίο αναφέρει την πληροφορία αυτή ως εξής:

«Μενέλαος δέ ὁ γεωμέτρης ἐν Ῥώμῃ φησίν τετηρῆσθαι τῷ α΄ ἔτει Τραϊανοῦ Μεχίρ ιε΄ εἰς τὴν ιϛ΄ὥρας ι΄ πεπληρωμένης τόν Στάχυν ὑπό της σελήνης ἠφανισμένον» [2]

Δηλαδή:

«Ο Μενέλαος ο γεωμέτρης, λένε ότι βρίσκονταν στη Ρώμη κατά το πρώτο έτος της κυριαρχίας του Τραϊανού, όπου παρατηρούσε στις 15 και 16 Φεβρουαρίου για δέκα ώρες την απόκρυψη του αστερισμού του Στάχυος από τη Σελήνη» **[3], [4]**

Ο Αυτοκράτορας Τραϊανός διαδέχεται στο θρόνο το ***Δομιτιανό*** ο οποίος είχε την εξουσία του Ρωμαϊκού κράτους από 81μ.Χ – 96μ.Χ. κι έτσι από την πληροφορία αυτή του Κλαύδιου Πτολεμαίου οριοθετείται περίπου το χρονικό διάστημα της ζωής του Μενελάου.

Ο Μενέλαος αναφέρεται κι από τον ***Πλούταρχο***(45μ.Χ-120μ.Χ.) κι απ' ότι φαίνεται οι δύο αυτοί άνδρες έζησαν περίπου την ίδια εποχή. Ο Πλούταρχος γράφει σε ένα διάλογο σχετικό με τις φάσεις της σελήνης για τον Μενέλαο:

«'"Αλλά νή Δί(α)" εἶπεν ὁ Λεύκιος 'καί τοῦτ' ἐρρήθη". Καί πρός γε Μενέλαον ἀποβλέψας ἐν τῷ διαλέγεσθαι τόν μαθηματικόν 'αἰσχύνομαι μέν ἔφη σοῦ παρόντος", ὦ φίλε Μενέλαε, 'θέσιν ἀναιρεῖν μαθηματικήν"» **[5]**

που σημαίνει:

«« Μα το Δία» είπε ο Λεύκιος «κι αυτό ειπώθηκε». Κι ύστερα αφού στράφηκε συζητώντας προς τον Μενέλαο το μαθηματικό είπε: «Ντρέπομαι φίλε Μενέλαε, ενώ εσύ είσαι παρών στην κουβέντα μας να αναιρούμε μαθηματικές αλήθειες»».

Η αναφορά αυτή του Πλούταρχου δείχνει το σεβασμό που συγκέντρωνε στο πρόσωπό του ο μαθηματικός αυτός στους υπόλοιπους φιλοσόφους και σκεπτόμενους της εποχής εκείνης.

Εκείνος όμως που μιλά για τον Μενέλαο και αναλύει σε σημαντικό βαθμό το έργο του είναι ο ***Θέων ο Αλεξανδρεύς***. Σε πολλά σημεία του έργου του με τίτλο ***«Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου»*** διαβάζουμε τη φράση:

«***ὡς Μενέλαος ἐν Σφαιρικοῖς»***

Δηλαδή:

«όπως ο Μενέλαος στο έργο του που λέγεται Σφαιρικά»

με την οποία ο Θέων πολλές φορές όταν θέλει να κάνει πιο πειστικό κάποιον ισχυρισμό του τον παρομοιάζει με κάποιον ισχυρισμό που ο Μενέλαος είχε καταγράψει στη ***«Σφαιρική ή Σφαιρικά»*** του.

Αργότερα ***ο Πάππος*** και ***ο Πρόκλος*** αναφέρουν κι άλλα έργα του Μενελάου. Εκτός από τη *«Σφαιρική»,* που είναι και το σπουδαιότερο έργο του έγραψε κι άλλα όπως *«Περί χορδών σε ένα κύκλο»* σε έξι βιβλία, *«Περί δύσης διάφορων τόξων του ζωδιακού κύκλου»*. Ασχολήθηκε με το Δήλιο πρόβλημα και γενικά το έργο του έχει σηματοδοτήσει νέες διαδρομές και νέα δεδομένα για το μέλλον των μαθηματικών.

Θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθεί η προσφορά των Αράβων για τη διάσωση και διατήρηση των έργων του Μενελάου.

Η «Σφαιρική» του Μενελάου καθώς και τα «Σφαιρικά» του προγενέστερου μαθηματικού Θεοδόσιου αποτελούν ένα μεγάλο συμπλήρωμα του XII και XIII βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη. Είναι γνωστό πως η Στερεομετρία των Στοιχείων του Ευκλείδη δεν ασχολείται παρά ελάχιστα για τη σφαίρα και τις ιδιότητες αυτής. Ειδικότερα ο Μενέλαος είναι ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια του ***σφαιρικού τριγώνου*.[6]**

Σε μια πρόταση που βρίσκεται στο τρίτο βιβλίο της «Σφαιρικής» και η οποία σχετίζεται με τα σφαιρικά τρίγωνα, ο Μενέλαος χρησιμοποιεί το γνωστό σήμερα ως ***«Θεώρημα του Μενελάου»*** που αναφέρεται στο επίπεδο**. [7]**

Β. Το Θεώρημα του Μενελάου στο επίπεδο

Το ερώτημα: «πότε τρία σημεία είναι συνευθειακά» είναι αρκετά δύσκολο και εκτός από τη στοιχειώδη αντιμετώπιση της παραπληρωματικότητας των γωνιών που σχηματίζει το ενδιάμεσο σημείο με τα υπόλοιπα δύο επεκτείνεται σε μεγάλη έκταση. Το Θεώρημα του Μενελάου μας δίνει σε πολλές περιπτώσεις τη δυνατότητα απάντησης και της εύκολης αντιμετώπισης τέτοιων ερωτημάτων.

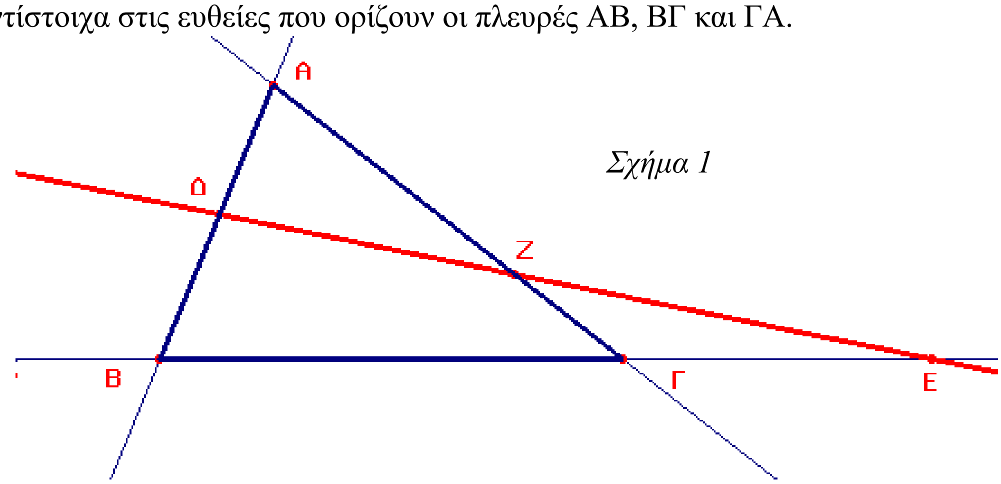
Θεώρημα Α

Αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε τρία σημεία Δ,Ε,Ζ που βρίσκονται στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ να είναι συνευθειακά, είναι:

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = +1 \quad (1)$$

Σχόλια:

1^{o}. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 1 έχουμε τα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ.



Σχήμα 1

Μια των πολλών περιπτώσεων που μπορούν αυτά να εμφανιστούν είναι αυτή του σχήματος 1. Θα μπορούσαν όμως αυτά να βρίσκονται και τα τρία σε περιοχές των ευθειών που αναφέραμε εκτός των πλευρών του τριγώνου. Βέβαια ποτέ δεν θα μπορούσαν να είναι συνευθειακά και να ανήκουν και τα τρία στις πλευρές του τριγώνου***(γνωστό ως αξίωμα του Pasch).*** **[8]**

2^{o}. Η σχέση (1) μπορεί να λάβει κι άλλες μορφές. Θυμίζουμε βέβαια πως οι σημειούμενες παύλες υπεράνω των ευθύγραμμων τμημάτων δηλώνει αλγεβρική τιμή των τμημάτων αυτών.

Μια άλλη μορφή που μπορεί να λάβει η σχέση αυτή είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}}{\overline{\mathrm{\Delta B}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{\Gamma Z}}}{\overline{\mathrm{ZA}}}=-1 \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι η αλλαγή του προσήμου της μονάδας προκύπτει από την αλλαγή του προσανατολισμού των τμημάτων αυτών. Η δεύτερη σχέση είναι πιο εύχρηστη γιατί ακολουθεί έναν κυκλικό κανόνα που πάντα διευκολύνει. Ξεκινάμε από μια κορυφή φτάνουμε στο ενδιάμεσο σημείο κατόπιν στη διαδοχική κορυφή αυτού και ούτω καθεξής ώσπου να φθάσουμε πάλι στην κορυφή που αρχίσαμε.

Μια ακόμα μορφή είναι να εκφραστεί η σχέση αυτή με την έννοια του μερικού λόγου. Τότε η (1) γίνεται:

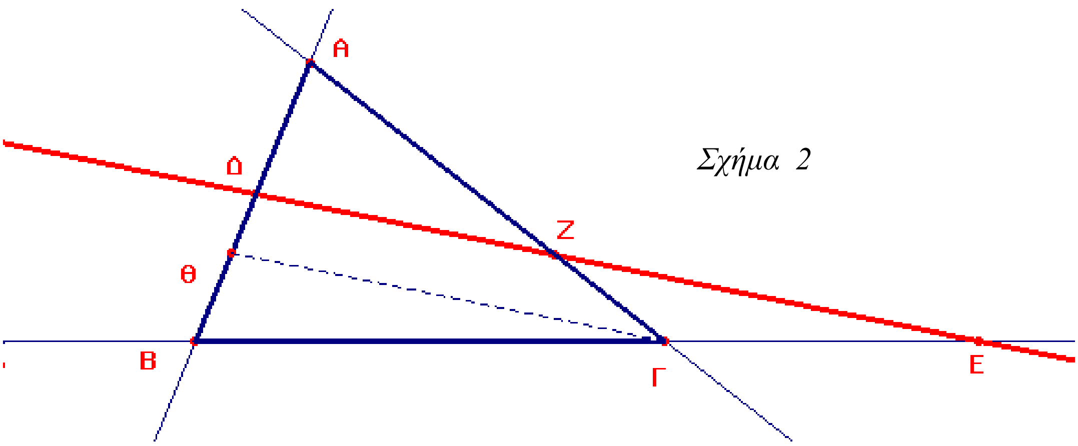
$$(\mathrm{AB\Delta})\cdot(\mathrm{B\Gamma Z})\cdot(\mathrm{\Gamma AE})=-1 \quad (3)$$

η οποία είναι απλούστερη.

Απόδειξη

Θεωρούμε την περίπτωση που τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι <u>**συνευθειακά.**</u>

1^{ος} τρόπος(με το θεώρημα Θαλή)



Σχήμα 2

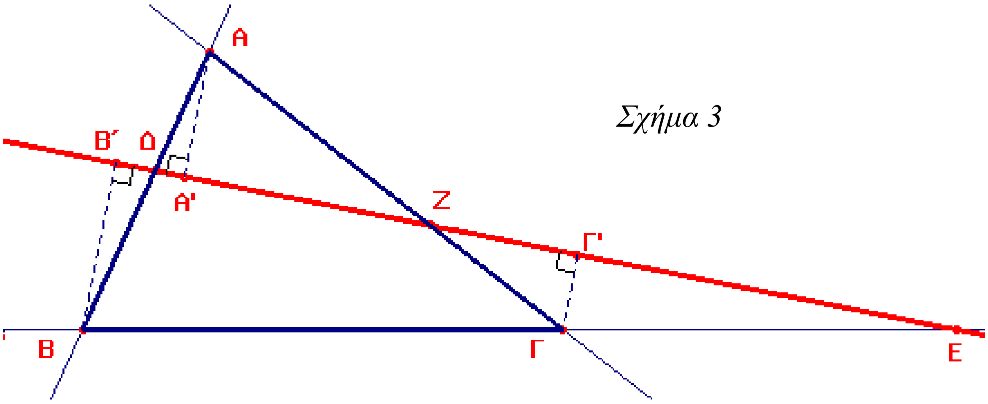
Αν από την κορυφή Γ φέρουμε την παράλληλη προς την ***διατέμνουσα*** ΔΕΖ, τότε θα προκύψει το σημείο Θ πάνω στην ευθεία που ορίζει η ΑΒ. Άρα το πρώτο μέλος της ζητούμενης σχέσης θα είναι:

$$\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}}{\overline{\mathrm{\Delta B}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{\Gamma Z}}}{\overline{\mathrm{ZA}}}=\left(-\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}}{\cancel{\overline{\mathrm{B\Delta}}}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{\overline{\mathrm{B\Delta}}}}{\cancel{\overline{\mathrm{\Delta\Theta}}}}\right)\left(-\frac{\cancel{\overline{\mathrm{\Delta\Theta}}}}{\overline{\mathrm{\Delta A}}}\right)=\left(\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}}{\overline{\mathrm{\Delta A}}}\right)=-1$$

Δηλαδή η (2).**[9]**

2^{ος} τρόπος (με το θεώρημα Θαλή)

Από τις κορυφές του τριγώνου φέρουμε τις κάθετες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄



Σχήμα 3

στη διατέμνουσα.(Σχ.3) Τότε:

$$\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}}{\overline{\mathrm{\Delta B}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{\Gamma Z}}}{\overline{\mathrm{ZA}}}=\frac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{B'B}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{\Gamma'\Gamma}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{\Gamma\Gamma'}}}{\overline{\mathrm{A'A}}}=$$

$$=\left(-\frac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\cancel{\overline{\mathrm{BB'}}}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{\overline{\mathrm{BB'}}}}{\cancel{\overline{\mathrm{\Gamma\Gamma'}}}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{\overline{\mathrm{\Gamma\Gamma'}}}}{\overline{\mathrm{A'A}}}\right)=\left(\frac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{A'A}}}\right)=-1$$

Δηλαδή η (2). **[10]**

3^{ος} τρόπος (με τη βοήθεια της ομοιοθεσίας)

Γενικά για τη σύνθεση δύο ομοιοθεσιών ισχύει:

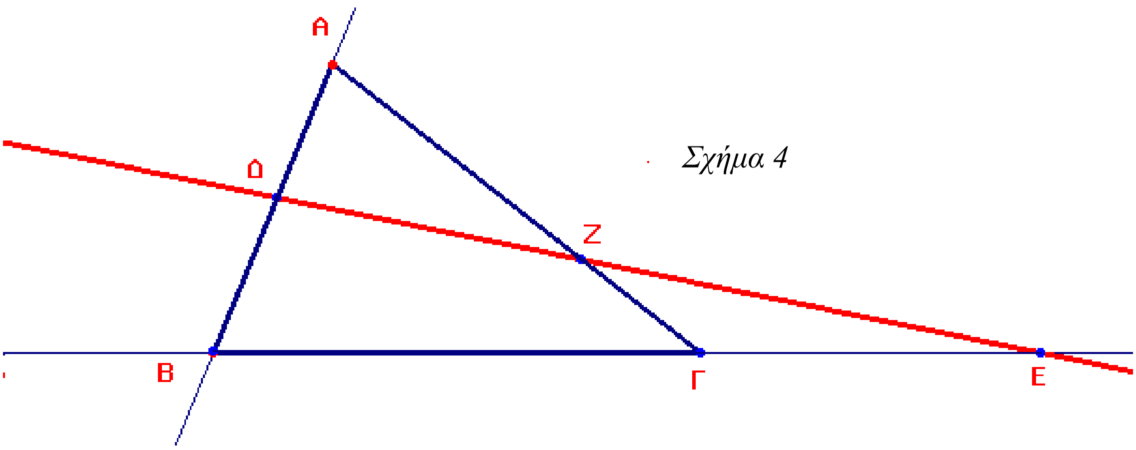
<u>Θεώρημα Ι.</u> Το γινόμενο δύο ομοιοθεσιών (O_1,λ_1) και (O_2,λ_2), όταν $\lambda_1\lambda_2\neq 1$ είναι μια νέα ομοιοθεσία με λόγο $\lambda_3=\lambda_1\lambda_2$ και με κέντρο

ένα σημείο της ευθείας που ορίζουν τα κέντρα O_1, O_2**.**

Το κέντρο της νέας αυτής ομοιοθεσίας είναι η τομή της ευθείας O_1O_2 **και της ευθείας που ορίζουν δύο ομόλογα σημεία της νέας αυτής ομοιοθεσίας. [11]**

Απόδειξη του θεωρήματος Μενελάου.

Θεωρούμε τις δύο ομοιοθεσίες(Σχ.4):



Σχήμα 4

- την ομοιοθεσία $H_1(\Delta, \lambda_1)$, με $\lambda_1 = -\frac{\Delta A}{\Delta B}$ η οποία έχει κέντρο το σημείο Δ και λόγο λ_1. Η ομοιοθεσία αυτή μετακινεί το σημείο Β στη θέση του σημείου Α.
- την ομοιοθεσία $H_2(Z, \lambda_2)$, με $\lambda_2 = -\frac{Z\Gamma}{ZA}$ η οποία έχει κέντρο το σημείο Ζ και λόγο λ_2. Η ομοιοθεσία αυτή μετακινεί το σημείο Α στη θέση του σημείου Γ.

Είναι ακόμα: $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ γιατί αν: $\lambda_1\lambda_2 = 1$ τότε: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{ZA}{Z\Gamma}$ άτοπο.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα (Ι), το γινόμενο των δύο αυτών ομοιοθεσιών είναι μια νέα ομοιοθεσία που οδηγεί το σημείο Β στο σημείο Γ. Η νέα αυτή ομοιοθεσία έχει λόγο:

$$\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} \neq 1$$

και κέντρο την τομή της ευθείας των κέντρων Δ, Ζ των δύο αυτών ομοιοθεσιών και της ευθείας που ορίζουν δύο ομόλογα σημεία, που είναι τα

Β και Γ. Άρα το κέντρο της νέας ομοιοθεσίας είναι το σημείο τομής των ευθειών ΔΖ και ΒΓ δηλαδή το σημείο Ε. Άρα:

$$\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}} \cdot \frac{\text{ΖΓ}}{\text{ΖΑ}} \quad ή \quad \frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}} \cdot \frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΕΓ}} \cdot \frac{\text{ΖΓ}}{\text{ΖΑ}} = 1$$

δηλαδή η (1) **[12]**

Και στις τρεις ανωτέρω περιπτώσεις ***το αντίστροφο*** είναι εύκολο. Δηλαδή εάν ισχύει η (1) τότε τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

Γενίκευση:

Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές $\mathrm{A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_\nu A_1}$ **ενός πολυγώνου** $\mathrm{A_1A_2A_3 \ldots A_\nu}$ **στα σημεία** $\mathrm{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_\nu}$ **τότε το γινόμενο των μερικών λόγων που προκύπτουν σε κάθε μια από τις ευθείες αυτές είναι ίσο με** $(-1)^\nu$ **. Δηλαδή:**

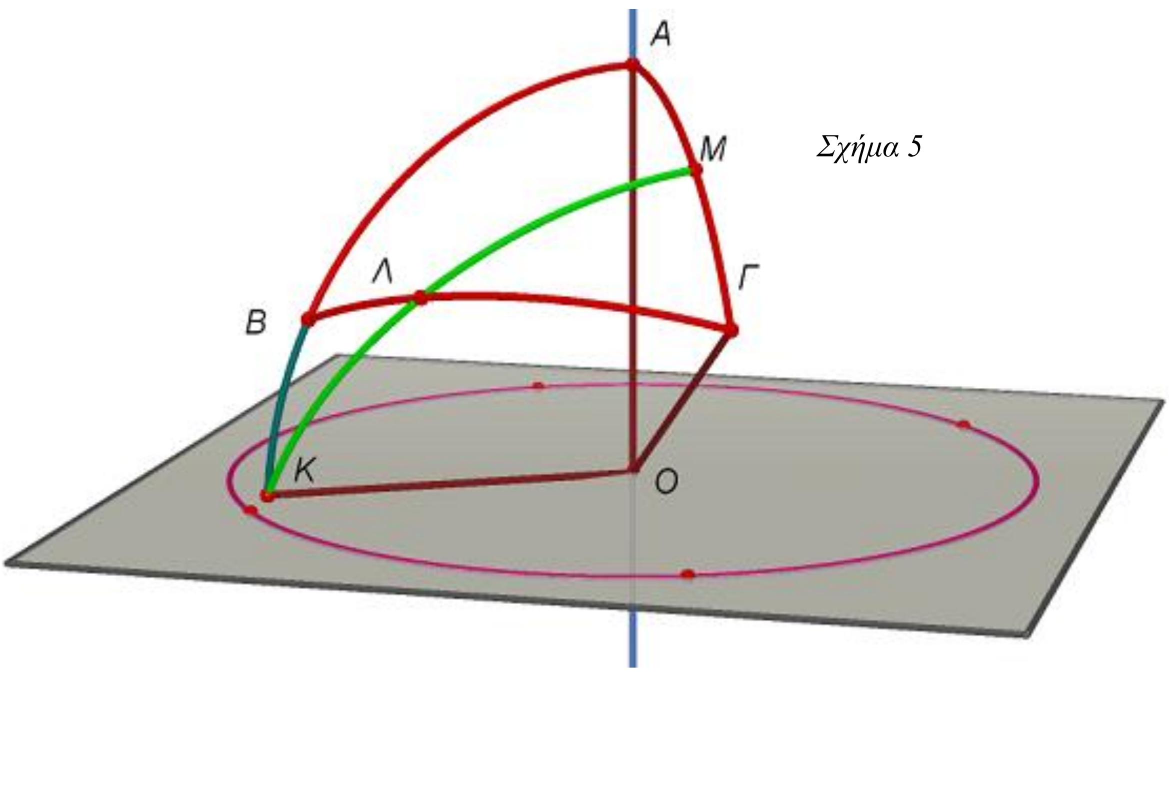
$$\left(\mathrm{A_1A_2X_1}\right) \cdot \left(\mathrm{A_2A_3X_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\mathrm{A_\nu A_1X_\nu}\right) = (-1)^\nu$$

Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά. **[13]**

Γ. Το Θεώρημα του Μενελάου στη σφαίρα.

Το θεώρημα του Μενελάου, είναι η πρώτη πρόταση του τρίτου Βιβλίου της ***«Σφαιρικής»*** του Μενελάου και αφορά τις «διατέμνουσες» σφαιρικών τριγώνων.

Ως τέτοιες θεωρούνται μέγιστοι κύκλοι μιας σφαίρας, οι οποίοι τέμνουν τους μέγιστους κύκλους της ίδιας σφαίρας πάνω στους οποίους



Σχήμα 5

κείνται τα τόξα που αποτελούν τις πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου.

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο οι πλευρές του είναι τόξα μέγιστων κύκλων και είναι πάντα μικρότερες των 180 μοιρών.

Στο σχήμα 5 φαίνεται το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ και μια διατέμνουσα αυτού η ΚΛΜ.

Θεώρημα Β

Αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε τρία σημεία Κ, Λ, Μ που βρίσκονται στους μέγιστους κύκλους μια σφαίρας (O,R) που ορίζουν οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ενός σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ να ανήκουν στο ίδιο μέγιστο κύκλο, είναι:

$$\frac{\eta\mu\,\mathrm{AK}}{\eta\mu\,\mathrm{KB}}\cdot\frac{\eta\mu\,\mathrm{B\Lambda}}{\eta\mu\,\Lambda\Gamma}\cdot\frac{\eta\mu\,\Gamma\mathrm{M}}{\eta\mu\,\mathrm{MA}}=+1 \quad (4)$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα της Επιπεδομετρίας:

<u>Λήμμα:</u>

Αν μια χορδή ΑΒ τέμνει μια ακτίνα ΟΔ ενός κύκλου C(O,R) στο σημείο Γ, τότε θα ισχύει:

$$\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{B}}=\frac{\eta\mu\,\mathrm{A}\Delta}{\eta\mu\,\Delta\mathrm{B}} \quad (5)$$

όπου τα τόξα $\mathrm{A}\Delta, \Delta\mathrm{B}$ **είναι μικρότερα του ημικυκλίου.**

Απόδειξη του Λήμματος

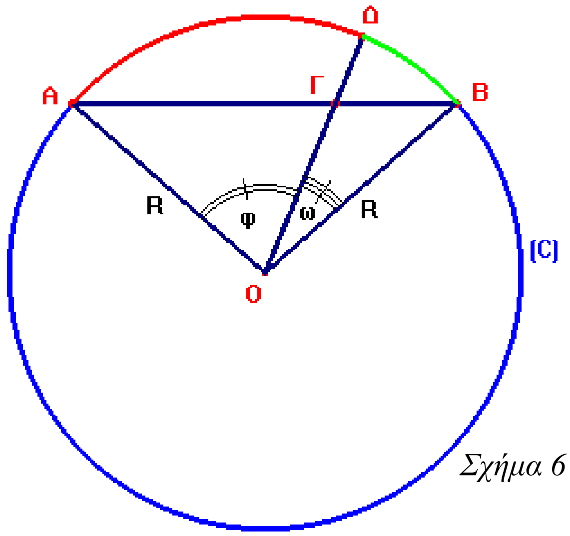
Είναι: (Σχ.6)

$$\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AO}\Gamma)}{\mathrm{E}(\mathrm{A}\Gamma\mathrm{B})}=\frac{\frac{1}{2}\cancel{(\mathrm{OA})}\cancel{(\mathrm{O}\Gamma)}\,\eta\mu\,\phi}{\frac{1}{2}\cancel{(\mathrm{O}\Gamma)}\cancel{(\mathrm{OB})}\,\eta\mu\,\omega}=\frac{\eta\mu\,\overset{\frown}{\mathrm{A}\Delta}}{\eta\mu\,\overset{\frown}{\Delta\mathrm{B}}}$$

Άρα:

$$\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{B}}=\frac{\eta\mu\,\mathrm{A}\Delta}{\eta\mu\,\Delta\mathrm{B}}$$

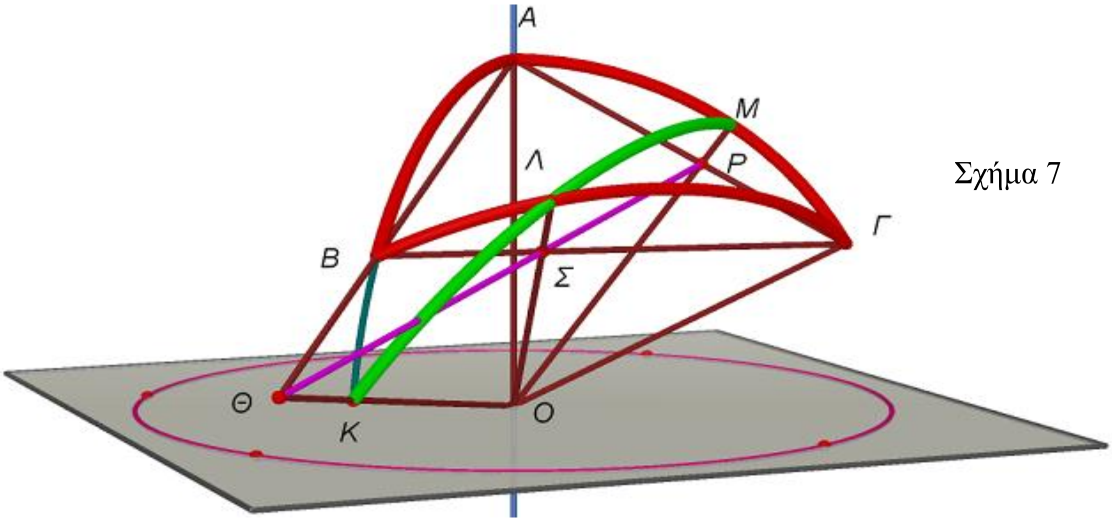
δηλαδή η (5).



Σχήμα 6

Απόδειξη του θεωρήματος Μενελάου

Θεωρούμε στο σχήμα 7 ότι τα σημεία **Κ, Λ, Μ** ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο. Φέρουμε τις χορδές των πλευρών του σφαιρικού τριγώνου, **ΑΒ, ΒΓ** και **ΓΑ.**



Σχήμα 7

Έστω ότι η **ΑΒ** τέμνει την **ΟΚ** στο σημείο **Θ** διότι οι **ΑΒ, ΟΚ** ανήκουν στο ίδιο επίπεδο του μεγίστου κύκλου που ορίζει η πλευρά **ΑΒ** του σφαιρικού τριγώνου **ΑΒΓ**).

Φέρουμε τα τμήματα **ΟΛ** και **ΟΜ** που ορίζουν με τις συνεπίπεδες μ' αυτά χορδές **ΒΓ** και **ΓΑ** τα σημεία **Σ** και **Ρ.**

Τα σημεία τώρα Θ, Σ, Ρ είναι συνευθειακά γιατί ανήκουν στην τομή των επιπέδων που ορίζει το τρίγωνο*(επίπεδο τρίγωνο)* και το επίπεδο του μεγίστου κύκλου που ορίζεται από τα σημεία Κ, Λ, Μ.*(διατέμνουσα του σφαιρικού τριγώνου)*

Άρα από το Θεώρημα του Μενελάου*(μορφή 1)* που ισχύει στο επίπεδο θα είναι:

$$\frac{\Theta\mathrm{A}}{\Theta\mathrm{B}}\cdot\frac{\Sigma\mathrm{B}}{\Sigma\Gamma}\cdot\frac{\mathrm{P}\Gamma}{\mathrm{PA}}=1$$

Τέλος από το αναφερθέν λήμμα θα έχουμε τελικά την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\eta\mu\,\mathrm{AK}}{\eta\mu\,\mathrm{KB}}\cdot\frac{\eta\mu\,\mathrm{B}\Lambda}{\eta\mu\,\Lambda\Gamma}\cdot\frac{\eta\mu\,\Gamma\mathrm{M}}{\eta\mu\,\mathrm{MA}}=1$$

δηλαδή η (4).

Δ. Το Θεώρημα του Μενελάου γενικότερα στο χώρο.

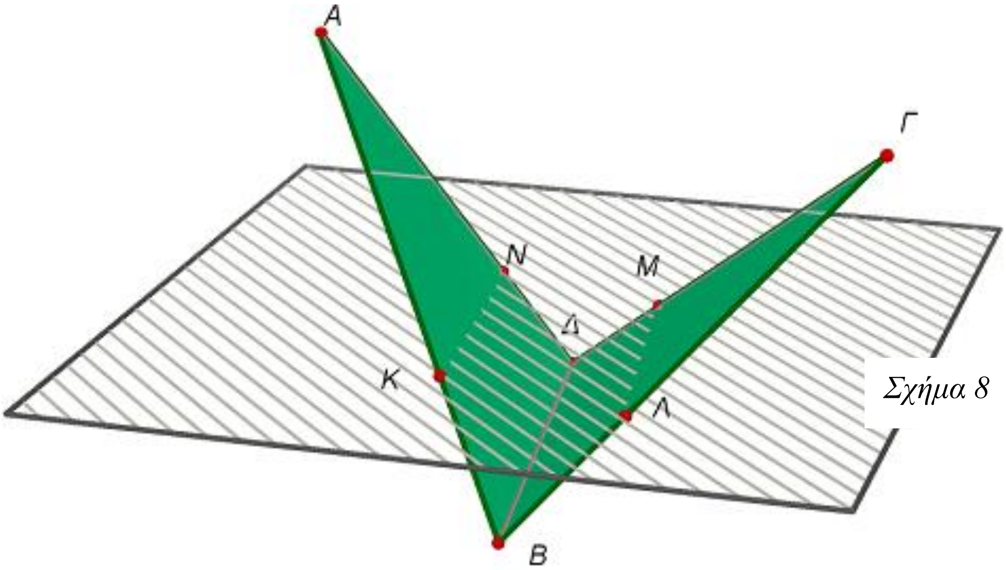
Ευρύτερα στο χώρο το θεώρημα του Μενελάου ισχύει στην περίπτωση που οι ευθείες που ορίζουν οι πλευρές ενός στρεβλού πολυγώνου τέμνονται από επίπεδο.

Θεώρημα Γ:

Εάν ένα επίπεδο τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός στρεβλού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αντίστοιχα τότε θα ισχύει:

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KB}}\cdot\frac{\mathrm{B\Lambda}}{\Lambda\Gamma}\cdot\frac{\Gamma\mathrm{M}}{\mathrm{M}\Delta}\cdot\frac{\Delta\mathrm{N}}{\mathrm{NA}}=1$$

και αντιστρόφως. (Σχήμα 8)



Σχήμα 8

Η απόδειξη γίνεται παρόμοια με εκείνη του θεωρήματος Α, δηλαδή με το θεώρημα του Θαλή στο χώρο. **[14]**

Η πρόταση γενικεύεται και για στρεβλά πολύγωνα περισσότερων πλευρών.

Επίλογος

Από την όλη ανάλυση, παρόλο που δεν έγινε εκτενής απόδειξη όλων των περιπτώσεων καθώς και απόδειξη των αντίστροφων προτάσεων του θεωρήματος αυτού, φαίνεται πως το Θεώρημα του Μενελάου αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο όχι μόνο στον ώριμο γεωμέτρη αλλά και στους μαθητές κυρίως των Λυκείων. Χωρίς αυτό τα ερωτήματα της ευθυγράμμισης τριών σημείων γίνονται δύσκολα και ακατανόητα. Εύλογα λοιπόν προκύπτει η ανάγκη της επανόδου του Θεωρήματος του Μενελάου και πολλών άλλων παρόμοιων προτάσεων στο σχολικό πρόγραμμα.

Παραπομπές – Βιβλιογραφία

[1] ***Ευάγγελος Σταμάτης****: Ελληνικά Μαθηματικά. Αθήναι 1976. Ὁ Ἡρόδοτος σχετικῶς πρός τήν γεωμετρίαν(Β'109), γράφει τά ἑξῆς: «δοκέοι δέ μοι ἐντεῦθεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα εἰς τήν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν» Δηλαδή: «νομίζω, ὅτι ἀπό ἐδῶ(τήν Αἴγυπτον), ἡ γεωμετρία, ἀφοῦ εὑρέθη , ἐπανῆλθεν εἰς τήν Ἑλλάδα»*

[2] ***Κλαύδιος Πτολεμαίος****: Μαθηματική Σύνταξις, 1,2.30.18-1,2.30.21. T.L.G.*

[3] ***Στάχυς ή Spica*** *είναι ο α' αστέρας του αστερισμού της Παρθένου.*

[4] ***Μεχίρ****: Φεβρουάριος στην Εβραϊκή γλώσσα.*

[5] ***Πλούταρχος:*** *Περί τοῦ ἐμφανομένου προσώπου τῷ κύκλῳ τῆς σελήνης(De facie in obe lunae) 930. A.5-A.9. T.L.G.*

[6] ***Thomas L. Heath*** *:Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών. Τόμ. ΙΙ, σελ.. 313.*

[7] ***Thomas L. Heath*****:** *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών. Τόμ. ΙΙ, σελ.. 317. Θεώρημα του Μενελάου για τη σφαίρα.*

[8] ***Ι. Ιωαννίδης*****:** *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, τόμ. ΙΙ,. ΟΕΔΒ.1969: Σελ.18.*

[9] ***Ιωάννης Πανάκης:*** *Μαθηματικά Δ΄-Ε΄- ΣΤ΄ Γυμνασίου, θετικής Κατ/νσης, τόμ. δεύτερος,ΟΕΔΒ 1972, σελ.32.*

[10] ***Σπ. Κανέλλου:*** *Ευκλείδειος Γεωμετρία Δ΄- Ε΄- ΣΤ΄ Γυμνασίου, θετικής κατ/νσεως. ΟΕΔΒ 1975 σελ.186.*

[11] ***Ν.Χ. Βαρουχάκης:*** *Συμπλήρωμα Γεωμετρίας δια την ΣΤ΄ Γυμνασίου, σελ. 142.*

[12] ***Ν.Χ. Βαρουχάκης:*** *Συμπλήρωμα Γεωμετρίας δια την ΣΤ΄ Γυμνασίου, σελ. 162.*

[13] ***Γεώργιος Α. Καπέτης:*** *Γεωμετρία του Τριγώνου, τόμ. Α΄, Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 7.*

[14] ***Π. Βασιλειάδης:*** *Στερεομετρία. Θεσσαλονίκη 1971. Σελ.21*