

# ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΣΕ ΟΒΑΛ. ΑΚΡΟΤΑΤΑ.

Γ.Τσίντσιφας

Ορίζουμε οβάλ κυρτό επίπεδο σχήμα χωρίς ευθύγραμμα τμήματα στη περίμετρο και με ακριβώς μία εφαπτομένη ευθεία σε κάθε σημείο της περιμέτρου του.

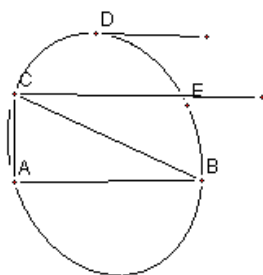
Εστω  $K$  οβάλ και  $A, B, \Gamma$  σημεία της περιμέτρου  $T$ . Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων  $A, B, \Gamma$  και είναι συνεχής συνάρτηση ως προς τις συντεταγμένες. Η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου είναι πεπερασμένη και φραγμένη, άρα έχει μέγιστο.

Με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι και η περίμετρος του εγγεγραμμένου τριγώνου έχει μέγιστο όπως και τα αντίστοιχα μεγέθη των περιγεγραμμένων τριγώνων (ελάχιστο).

## ΘΕΩΡΗΜΑ 1.

Αν  $AB\Gamma$  το τρίγωνο μέγιστου Εμβαδού εγγεγραμμενου στο οβαλ  $K$ , τότε οι εφαπτόμενες στις κορυφές είναι παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές.

Η απόδειξη δια της εις άτοπον απαγωγής. (είναι εύκολη)

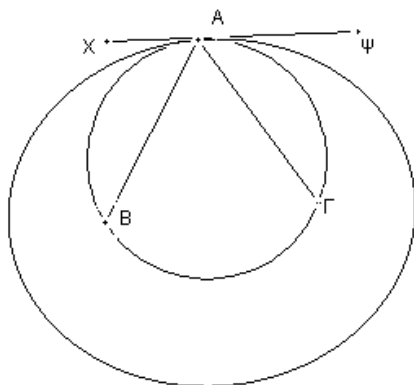


## ΘΕΩΡΗΜΑ 2.

Αν  $AB\Gamma$  το τρίγωνο μέγιστης περιμέτρου εγγεγραμμένο στο οβάλ  $K$ , τότε οι εφαπτόμενες στις κορυφές σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις αντίστοιχες πλευρές. Δηλαδή αν  $X\Psi$  η εφαπτομένη στο  $A$  οι γωνίες  $XAB$  και  $XA\Gamma$  είναι ίσες, κ.λ.

Η απόδειξη διά της εις άτοπον απαγωγής.

Θα πρέπει να θεωρήσουμε την οικογένεια ( $\gamma$ ) των ελλείψεων με εστίες  $B, \Gamma$  που περιέχουν το οβάλ  $K$  και να πάρουμε ως  $A$  το σημείο επαφής μίας έλλειψης  $\gamma^*$  απο την οικογένεια ( $\gamma$ ) με το οβάλ.



## ΘΕΩΡΗΜΑ 3.

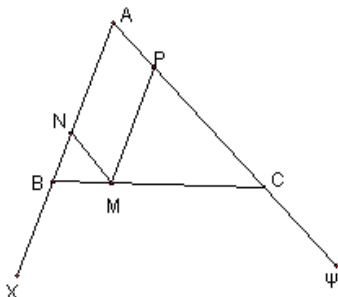
Αν  $AB\Gamma$  είναι το τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού το περιγεγραμμένο περί το οβάλ  $K$ , τότε τα σημεία επαφής με το οβάλ  $K$  είναι τα μέσα των αντιστοιχων πλευρών.

Η απόδειξη διά της εις άτοπον απαγωγής. Χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

### ΛΗΜΜΑ.

Αν είναι  $M$  ένα εσωτερικό σημείο γωνίας  $XA\Psi$  τότε η ευθεία ( $\epsilon$ ) διά του σημείου  $M$  που αποκόπτει απο τη γωνία  $XA\Psi$  τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού είναι μοναδική και το αντίστοιχο τμήμα έχει μέσο το σημείο  $M$ . Παραθέτω μιά απλή απόδειξη.

Εστω (ε) τυχούσα ευθεία διά του σημείου M και B,Γ τα σημεία τομής με τις πλευρές γωνίας ΧΑΨ. Φέρνουμε MN παράλληλο προς ΑΨ και MP παράλληλο προς ΑΧ.Εστω MN=λ και MP=μ.



Εύκολα βλέπουμε ότι  $\frac{\mu}{AB} + \frac{\lambda}{AG} = 1$

Και από την A.M-A.G ανισότητα έχουμε

$$1 = \frac{\mu}{AB} + \frac{\lambda}{AG} \geq 2\sqrt{\frac{\lambda\mu}{AB \cdot AG}}$$

προφανώς

$$AB \cdot AG \geq 4\lambda\mu$$

η ισοδύναμα

$$(AB \cdot AG) \geq 2\lambda\mu\eta\mu A$$

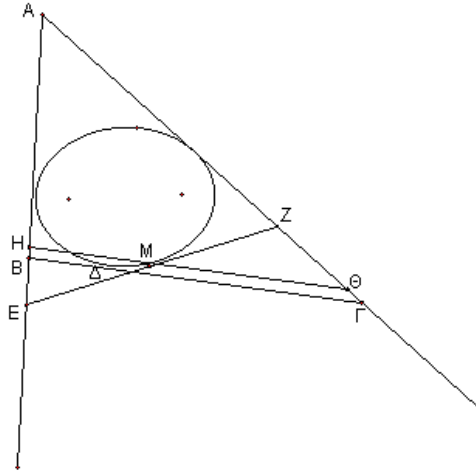
και τέλος

$$\min(AB \cdot AG) = 2\lambda\mu\eta\mu A$$

$$\text{όταν } \frac{\lambda}{AG} = \frac{\mu}{AB} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή το σημείο M το μέσο του τμήματος ΒΓ.

Ας έρθουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3. Υποθέτουμε ότι το τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού, το περιγεγραμμένο στο οβάλ K είναι το ABΓ ώστε αν Δ το σημείο επαφής στη πλευρά ΒΓ να είναι ΒΔ ≠ ΔΓ.



Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ευθεία EZ εφαπτόμενη του K ώστε το σημείο επαφής M να είναι το μέσο του τμήματος EZ. Από το σημείο M φέρνουμε την HΘ παράλληλη προς την BΓ. Σύμφωνα με το λήμμα είναι.

$(EAZ) < (HAΘ)$  και προφανώς  $(HAΘ) < (BAΓ)$ .

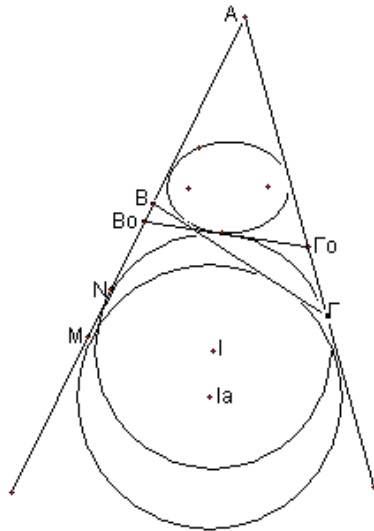
#### **ΘΕΩΡΗΜΑ 4.**

Αν είναι ABΓ το περιγεγραμμένο τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου περί το οβάλ K τότε τα σημεία επαφής των πλευρών του τριγώνου είναι τα ίδια με τα σημεία επαφής των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου ABΓ με τις πλευρές του αντίστοιχα.

Η απόδειξη γίνεται πάλι διά της εις άτοπον απαγωγής, χρειαζόμαστε όμως την εξής βοηθητική πρόταση.

Αν AX και AΨ εφαπτόμενες του οβάλ K τότε η εφαπτομένη BΓ που αποκόπτει από τη γωνία τρίγωνο ABΓ ελάχιστης περιμέτρου εφάπτεται στο K στο σημείο επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ επί της πλευράς BΓ.

Εστω ABΓ ένα τυχαίο τρίγωνο περιγεγραμμένο στο οβάλ K και  $(Iα, Pα)$  ο παρεγγεγραμμένος κύκλος του ABΓ, M το σημείο επαφής της πλευράς AB επί του  $(Iα, Pα)$ . Είναι γνωστό ότι  $AM = \tau$  όπου  $\tau$  η ημιπερίμετρος του ABΓ. Αν τώρα θεωρήσουμε την ομοιοθεσία του  $(Iα, Pα)$  με κέντρο το A και



λόγο  $P/P\alpha$ , ο κύκλος  $(I\alpha, P\alpha)$  μετασχηματίζεται στο  $(I, P)$ . Στη θέση όπου ο  $(I, P)$  γίνει ο εφάπτομενος κύκλος του  $K$  το τρίγωνο  $AB_0\Gamma_0$ , όπου  $B_0\Gamma_0$  το ευθ. τμήμα που ορίζεται επί της κοινής εφάπτομένης του προηγούμενου κύκλου και του οβάλ  $K$ , θα έχει την μικρότερη περίμετρο.

Μετα τα παραπάνω η απόδειξη του θεωρήματος 4 διά της εις άτοπον απαγωγής είναι προφανής.

### Παρατηρήσεις

Απ' όλα τα παραπάνω βγαίνουν ακόμη τα ακόλουθα συμπεράσματα.

1. Το ελαχίστου εμβαδού περιγεγραμμένο τρίγωνο σε οβάλ έχει σημεία επαφής τις κορυφές του τριγώνου μέγιστου εμβαδού του εγγεγραμμένου στο οβάλ. Τα σημεία αυτά είναι τα μέσα των πλευρών του περιγεγραμμένου τριγώνου.
2. Εάν  $AB\Gamma$  είναι το τρίγωνο μέγιστης περιμέτρου το εγγεγραμμένο στο οβάλ  $K$  τότε οι εφάπτομενες ευθείες στα  $A, B, \Gamma$  σχηματίζουν τρίγωνο  $A_0B_0\Gamma_0$  του οποίου το ορθικό τρίγωνο είναι το  $AB\Gamma$ .

### Βιβλιογραφία.

1. G. D. Chakerian and L. H. Lange, Geometric Extremum Problems, Math.Magazine, vol44, No 2, pp 57-69.
2. M. M. Day, Polygons circumscribed about closed convex curves, Trans. Am. Soc. Vol 62, pp 315-319, 1957.

3. Crux, September 2005, KLAMKIN 13, submitted by George Tsintsifas.