Χρήσιμες γνώσεις από την Β΄ Λυκείου

1. Αριθμητική πρόοδος

α. Νιοστός όρος $α_ν = α_1 + (ν – 1)ω$

β. Άθροισμα ν πρώτων όρων $S_v = \frac{v(a_1 + a_v)}{2}$

ή $S_v = \frac{v[2a_1 + (v-1)\omega]}{2}$.

γ. Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\Leftrightarrow$ 2β = α + γ

2. Γεωμετρική πρόοδος

α. Νιοστός όρος $α_ν = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$

β. Άθροισμα ν πρώτων όρων $S_v = a_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$

γ. Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $\Leftrightarrow$ $β^2 = α \cdot γ$

3. Τριγωνομετρικοί τύποι

α. $ημ^2α + συν^2α = 1$

β. $εφ^2α + 1 = \frac{1}{συν^2α}$

γ. $εφα = \frac{ημα}{συνα}$ και $σφα = \frac{συνα}{ημα}$

δ. $εφα \cdot σφα = 1$

4. Τριγωνομετρικές εξισώσεις

α. ημ =ημθ $\Leftrightarrow$ x=2κπ + θ ή x =2κπ+π – θ, $κ \in \mathbb{Z}$

ημx = 0 $\Leftrightarrow$ **x = κπ,** $κ \in \mathbb{Z}$

β. συνx = συνθ $\Leftrightarrow$ x = 2κπ + θ ή x = 2κπ – θ, $κ \in \mathbb{Z}$

συνx = 0 $\Leftrightarrow$ **x = κπ +** $\frac{\pi}{2}$**,** $κ \in \mathbb{Z}$

γ. εφx = εφθ $\Leftrightarrow$ x = κπ + θ, $κ \in \mathbb{Z}$

δ. σφx = σφθ $\Leftrightarrow$ x = κπ + θ, $κ \in \mathbb{Z}$

5. Ταυτότητες:

α) $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

β) $\left(a-b\right)\left(a+b\right) = a^2 - b^2$

γ) $\left(a \pm b\right)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

δ) $a^3 \pm b^3 = \left(a \pm b\right)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$

ε) $\left(a+b+c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

στ) $a^2 + b^2 + c^2 \pm \left(ab + bc + ac\right) = \frac{1}{2}\left[\left(a \pm b\right)^2 + \left(b \pm c\right)^2 \left(a \pm c\right)^2\right]$

6. Απόσταση δυο σημείων στο επίπεδο και μέτρο διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

Αν $A(x_1, ψ_1)$ και $B(x_2, ψ_2)$ τότε **(ΑΒ) =** $\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

7. Συντεταγμένες μέσου ευθύγραμμου τμήματος

Αν $A(x_1, ψ_1)$ και $B(x_2, ψ_2)$ τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και Μ(x, ψ) το μέσον του, τότε $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $ψ = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ (Ισχύει ο τύπος $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$)

8. Συντελεστής διεύθυνσης (λ) ευθείας ΑΒ και συντελεστής διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

a. Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον χ΄χ και $ω \neq 90^0$ τότε λ = εφω.
b. Αν $A(x_1, ψ_1)$ και $B(x_2, ψ_2)$ τότε **λ =** $\frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1}$ με $\mathbf{x_1 \neq x_2}$
c. Αν $x_1 = x_2$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, τότε ΑΒ // ψ΄ψ και $\overrightarrow{AB}$ // ψ΄ψ

9. Εξίσωση ευθείας

a. Ευθεία που διέρχεται από σημείο $(x_0, ψ_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ: **$ψ – ψ_0 = λ(x – χ_0)$**
b. Ευθεία παράλληλη στον χ΄χ: ψ = c (c σταθερός) (ψ = 0 ο άξονας χ΄χ)
c. Ευθεία παράλληλη στον ψ΄ψ: x = c (x = 0 ο άξονας ψ΄ψ)
d. **ψ = χ** και **ψ = -χ** οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων.

10. Εμβαδόν τριγώνου

Αν Α, Β, Γ κορυφές τριγώνου τότε το εμβαδόν του: (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$

Άλλος χρήσιμος τύπος (ΑΒΓ)= $\frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu\hat{A} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu\hat{B}$

11. Απόσταση σημείου Μ(x_0, ψ_0) από ευθεία ε: αx + βy + γ = 0

$$d(M,\varepsilon) = \frac{|ax_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{a^2 + \beta^2}}$$

12. Αν $\vec{a} = (a,\beta)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \vec{\beta} = (\gamma,\delta)$ τότε:

a. $\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma = 0$

b. $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, λ πραγματικός

c. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma + \beta\delta = 0$

d. αν $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ με λ > 0, ή $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, ή $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|$

e. αν $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ με λ < 0 , ή $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|$, ή $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|$

13. Κύκλος

a. Με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα $\rho \neq 0$: **$x^2 + \psi^2 = \rho^2$**
b. Με κέντρο Κ(χ_0, ψ_0) και ακτίνα $\rho \neq 0$: **$(x - x_2)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho^2$**
c. Γενική εξίσωση κύκλου :x^2 **$+ \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$** με κέντρο Κ($-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}$) και ακτίνα ρ = $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$ (με την ***προϋπόθεση*** ότι **$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$**) .

14. Παραβολή

a. Με εστία στον χ΄χ: c: **$\psi^2 = 2\rho x$** διευθετούσα δ:x = $-\frac{\rho}{2}$, εστία Ε($\frac{\rho}{2}$,0)

b. Με εστία στον ψ΄ψ: c: x^2 **$= 2\rho\psi$** διευθετούσα δ:ψ = $-\frac{\rho}{2}$, εστία Ε(0, $\frac{\rho}{2}$)

Ορισμός: **Μ$\in c$ αν-ν d(M,δ) = (ΜΕ)**

15. Έλλειψη

a. Με εστίες στον χ΄χ: c: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ Εστίες Ε΄(- γ, 0) Ε(γ, 0) **α >γ** και $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

b. Με εστίες στον ψ΄ψ: c: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$Εστίες Ε΄(0, - γ) Ε(0, γ) α >γ και $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

Ορισμός: Μ$\in c$ αν-ν (ΜΕ΄) + (ΜΕ) = 2α με <u>(ΕΕ΄) < 2α</u>

16. Υπερβολή

a. Με εστίες στον χ΄χ: c: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ Εστίες Ε΄(- γ, 0) Ε(γ, 0) **α <γ** και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

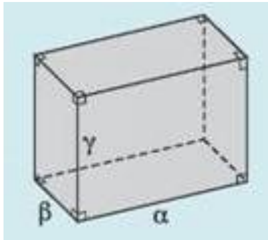
Ασύμπτωτες ψ = $\pm\frac{\beta}{\alpha}x$

b. Με εστίες στον ψ΄ψ: c: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ Εστίες Ε΄(0, - γ) Ε(0, γ) **α <γ** και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ Ασύμπτωτες $\psi = \pm\frac{\alpha}{\beta}x$

Ορισμός: Μ $\in c$ αν-ν |(ΜΕ΄) - (ΜΕ)| = 2α με <u>(ΕΕ΄) > 2</u>$^{\alpha}$

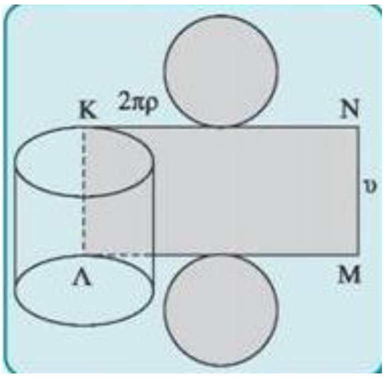
Εμβαδά και όγκοι στερεών σχήματων

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διατάσεων α, β, γ
<u>Εμβαδόν</u> **Ε = 2αβ + 2αγ + 2βγ**
<u>Όγκος</u> **V = αβγ**
Ο κύβος είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις ίσες
<u>άρα Εμβαδόν κύβου</u> **Ε = 6α^2**
και <u>Όγκος κύβου</u> **V = α^3**



Κύλινδρος με ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ
<u>Εμβαδόν κυρτής</u> ή παράπλευρης επιφάνειας (δηλαδή η επιφάνεια του κυλίνδρου χωρίς τις βάσεις)
$E_{\pi\alpha\rho}$ = (περίμετρος βάσης)Χ(ύψος)=2πρυ
<u>Εμβαδόν ολικής επιφάνειας</u>
$E_{o\lambda} = E_{\pi\alpha\rho} + E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\omega\nu}$ = 2πρυ + 2πρ^2

Όγκος Κυλίνδρου
V = (εμβαδόν βάσης)Χ(ύψος)= πρ^{2}υ



Σφαίρα ακτίνας ρ
<u>Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας</u> **Ε = 4πρ^2**
<u>Όγκος σφαίρας</u> **V = $\frac{4}{3}$πρ^3**