ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Πρακτικές και καινοτομίες στην εκπαίδευση και στην έρευνα.

Βλάστος Αιμίλιος, aistos@sch.gr ,Κίτρους Επισκόπου 3 ,Καρδίτσα 43100
Βαμπούλας Βασίλης, vasvampoul@yahoo.gr, Πλαστήρα 20 ,Τρίκαλα 42100

Περίληψη

Η εργασία έχει σαν στόχο την χρησιμοποίηση δυναμικών αναπαραστάσεων στην εκπαιδευτική διαδικασία και εστιάζει σε θέματα στατιστικής με χρήση νέας τεχνολογίας. Έτσι αναδεικνύονται νέες αναπαραστάσεις εννοιών της στατιστικής με τη βοήθεια της τεχνολογίας. Τα μέτρα θέσης κινούνται δυναμικά, μεταβάλλονται όταν αλλάζουμε τις παρατηρήσεις. Το πολύγωνο συχνοτήτων μετατρέπεται σε καμπύλη. Η κανονική καμπύλη μετακινείται οριζόντια, εκτείνεται ή συρρικνώνεται. Το λογισμικό παράγει τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και συσχετίζει τις κανονικές κατανομές.

Summary

This paper aims to use dynamic representation using new technologies in the educational process and focuses on statistics. New representations of concepts of statistics are generated with the assistance of technology. Measures of location move dynamically and are altered when we change data . Frequency polygon changes into a curve. The normal curve moves horizontally stretching or shrinking. The software generates a table of standard normal distribution and correlates the normal ones.

1. Εισαγωγή

Η λέξη Στατιστική έχει τη ρίζα της στην λατινική λέξη κοινωνία (status) και χρησιμοποιήθηκε αρχικά σαν σύστημα οργάνωσης αρχείων για την παρακολούθηση της κρατικής περιουσίας και άλλων οικονομικών αγαθών. Οι αρχές της στατιστικής αναπτύχθηκαν κατά τον 18ο αιώνα ενώ κατά τα μέσα 19ου αιώνα και μετά την ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων συγκροτήθηκε σαν επιστήμη. Η στατιστική αποτελεί μέρος του ελληνικού αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών. Έννοιες της περιγραφικής στατιστικής έχουν εισαχθεί στα αναλυτικά προγράμματα της μαθηματικής εκπαίδευσης λόγω των αυξανόμενων αριθμών επαγγελματικών πεδίων που απαιτούν τη χρήση στοιχείων στατιστικής συλλογιστικής (Αναστασιάδου & Γαγάτσης, 2005).

Από έρευνες που έγιναν σχετικά με τη διδασκαλία της στατιστικής οι μαθητές ανατρέχουν σε μεθοδολογίες και υπολογισμούς βάσει τύπων πριν ακόμα αποκτήσουν άποψη για το θέμα που τους τίθεται , οπότε σπάνια ανταποκρίνονται με επιτυχία σε προβλήματα παρόμοια με αυτά που έχουν διδαχθεί αλλά στα οποία ενυπάρχουν καινούργιες καταστάσεις. Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στο να διερευνήσει έννοιες της στατιστικής και να συμβάλλει στον καλύτερο τρόπο διδασκαλίας, βασίζεται δε στις δυναμικές πολλαπλές αναπαραστάσεις που μπορεί να δημιουργηθούν με τη χρήση κατάλληλων μέσων.

Η ικανότητα να προσδιορίζεται η ίδια έννοια με διαφορετικές αναπαραστάσεις και η ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη, είναι κύρια στοιχεία στη μάθηση των μαθηματικών, διότι επιτρέπουν στους μαθητές να δουν τις πολλαπλές σχέσεις και να κατανοήσουν βαθιά την έννοια (Even, 1998). Τα συστήματα αναπαραστάσεων είναι θεμελιώδη και καθοριστικά για τη μάθηση (Cheng, 2000). Επίσης, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να παρουσιάζεται η πληροφορία στους μαθητές με ποικίλες μορφές και να διδάσκεται η σχέση και η σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων.

Οι αναπαραστάσεις στη στατιστική είναι άφθονες στα σχολικά βιβλία και στα επιστημονικά εγχειρίδια. Με τη χρήση όμως κατάλληλου λογισμικού μπορούμε να δώσουμε δυναμικές αναπαραστάσεις, όπου με την τροφοδότηση δεδομένων, την μετακίνηση ενός δρομέα τιμών, αναπαραστάσεις γνωστές (σημειογράμματα, ιστογράμματα, καμπύλες συχνοτήτων) και άγνωστες (μπάρα θέσης μέσης τιμή-παρατηρήσεων) μεταβάλλονται δυναμικά προσφέροντας χρήσιμες εμπειρίες. Επίσης είναι δυνατή η αναπαράσταση των μέτρων θέσης, η συσχέτισή τους και η σύνδεσή τους με τα δεδομένα-παρατηρήσεις.

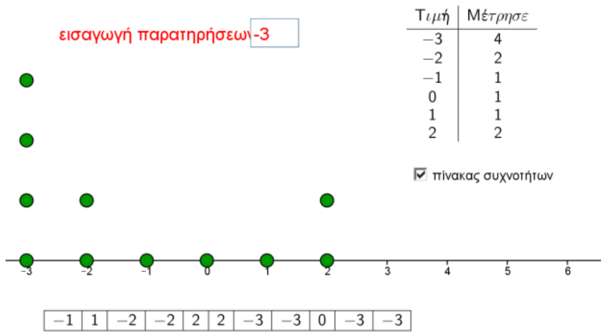
Χρησιμοποιώντας σήμερα την ψηφιακή τεχνολογία μπορούμε να τα βγάλουμε πέρα με προγράμματα πολύ πιο δύσκολα και περίπλοκα. Η τεχνολογία προσφέρεται ως υλικό με το οποίο στη συνέχεια οι μαθητές θα μπορούσαν να χτίσουν, να φτιάξουν πράγματα μόνα τους. Τα παιδιά έτσι μαθαίνουν σιγά-σιγά να τα βγάζουν πέρα με όλο και πιο δύσκολα προγράμματα, το μυαλό τους μαθαίνει να κατεβάζει ιδέες και αποκτούν

εμπειρία η οποία αργότερα θα τους φανεί πολύ χρήσιμη. (Seymour Papert,1998)
Επιλέχθηκε το ελεύθερο λογισμικό Geogebra, του οποίου το πολλαπλό περιβάλλον δημιουργεί με ευκολία δυναμικές αναπαραστάσεις, και προσφέρει δυνατότητα προγραμματισμού (Java Script) για τον δημιουργό και δυνατότητες για ανατροφοδότηση στον ασκούμενο. Παραθέτουμε κυρίως τη μαθηματική και όχι την τεχνολογική περιγραφή του πως έγιναν οι κατασκευές. Υπάρχουν πολλά σχήματα ώστε να δείξουμε αποσπάσματα από αυτές τις πλούσιες δυναμικές αναπαραστάσεις.

2. Παρατηρήσεις και τιμές μιας μεταβλητής

Στην αρχική φάση έχει κατασκευαστεί ένα κουτί εισαγωγής παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής που αφορά έστω τις θερμοκρασίες Κελσίου -1,1,-2,-2,2,2,-3,-3,0,-3,-3 ενός τόπου. Οι θερμοκρασίες αναπαρίστανται σαν σημεία και μάλιστα αυτές που είναι ίδιες τοποθετούνται η μία πάνω στην άλλη. Δημιουργείται έτσι σταδιακά ένα σημειόγραμμα. Οι παρατηρήσεις αποτυπώνονται σαν σημεία ενώ οι τιμές τους είναι οι τετμημένες στον άξονα x΄x.
Όλες οι θερμοκρασίες αποτελούν τις παρατηρήσεις του δείγματος, τις διαφορετικές τους τιμές θα τις αποκαλούμε τιμές και θα τις συμβολίζουμε με x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 γενικά xi , i=1,2,…6 όπου X η ποσοτική μεταβλητή θερμοκρασίες .

<u>Σχήμα1</u>
το σημειόγραμμα, οι παρατηρήσεις και ο πίνακας συχνοτήτων

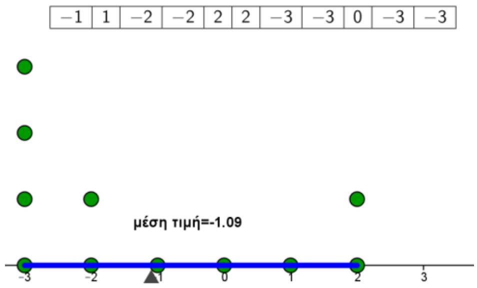


Στο παραπάνω σχήμα1 φαίνονται το εργαλείο της εισαγωγής των παρατηρήσεων, το σημειόγραμμα, οι παρατηρήσεις και ο πίνακας συχνοτήτων. Στον πίνακα συχνοτήτων η λέξη *Τιμή* αναφέρεται στις τιμές xi μιας μεταβλητής και η λέξη *Μέτρησε* στην έννοια της συχνότητας των τιμών

Οι αναπαραστάσεις των παρατηρήσεων και του πίνακα συχνοτήτων είναι κοινές στα βιβλία στατιστικής, όμως η εκτέλεση της παραπάνω φάσης δυναμικά δίνει και την πρόσθετη αξία που είναι η μη σύγχυση της έννοιας της τιμής μιας παρατήρησης με την ίδια την παρατήρηση.

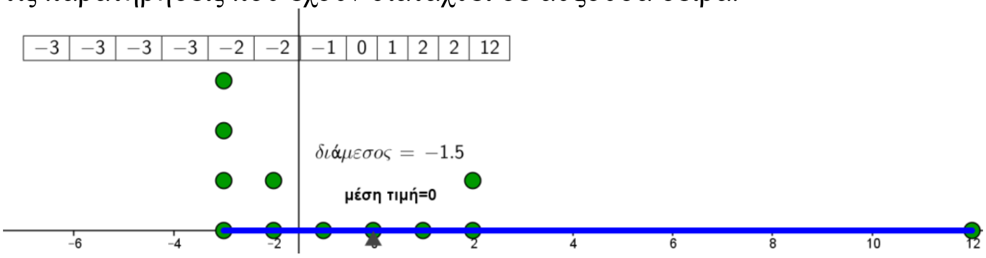
3. Αναπαράσταση των μέτρων θέσης

Για να δείξει κανείς τη δύναμη και την ομορφιά του Στατιστικού συλλογισμού απαιτούνται κάποια παραδείγματα ρεαλιστικά από μια μεγάλη ποικιλία επιστημονικών κλάδων. Έτσι οι μαθητές αντιλαμβάνονται πως ασχολούνται με κάτι πραγματικό που συναντάται είτε στην καθημερινότητα είτε σε επιστημονικούς τομείς. Επιπλέον τα υπαρκτά παραδείγματα μένουν ευκολότερα στη μνήμη των μαθητών. Θέλοντας να αναφέρουμε στη διδασκαλία μας την έννοια της μέσης τιμής ένα υπαρκτό παράδειγμα είναι: η αναφορά που θέλει να στείλει ο υπεύθυνος του μετεωρολογικού σταθμού στην υπηρεσία του βασιζόμενος σε μια θερμοκρασία που να αντιπροσωπεύει τις 11 θερμοκρασίες Κελσίου που κατέγραψε σε 11 διαφορετικές ώρες. Συνήθως οι μαθητές εργάζονται με τύπους και ακολουθούν αλγοριθμικές διαδικασίες (εμπλουτισμένους πίνακες κατανομών συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων) πριν να σχηματίσουν μια καθαρή εικόνα του προβλήματος. Όπως αναφέρουν οι Pollatsek, Lima, Well(1981) η μέση τιμή είναι για τους μαθητές περισσότερο μια υπολογιστική πράξη παρά εννοιολογική.
Με το λογισμικό μπορούμε να αναπαραστήσουμε ότι όλα τα σημεία έχουν το ίδιο βάρος και στέκονται σε μια χρωματιστή αβαρή μπάρα όπου η μπάρα μαζί με τα σημεία ισορροπεί στην θέση που βρίσκεται η μέση τιμή. Έτσι ενισχύουμε περισσότερο τον ισχυρισμό ότι η μέση τιμή αντιπροσωπεύει όλες τις παρατηρήσεις. Πρόσθετη αναπαραστασιακή αξία είναι η θέση της μέσης τιμής δίπλα στα xi και το γεγονός ότι δεν είναι κατά ανάγκη κάποια από τις τιμές. Επίσης γίνεται κατανοητό ότι η μέση τιμή δεν μπορεί να βρίσκεται έξω από το διάστημα [-3,2], δηλαδή από τις ακρότατες θερμοκρασίες. Μια καλή πρακτική είναι στην αρχική εισαγωγή των θερμοκρασιών να εμφανίζεται κάθε φορά η μέση τιμή και σαν αριθμός αλλά και σαν θέση πάνω στον άξονα και ανάμεσα στα xi. Στο παρακάτω σχήμα2 απεικονίζεται η θέση της μέσης τιμής με τιμή -1.09 στον x΄x.



<u>Σχήμα2</u>
το σημειόγραμμα, οι παρατηρήσεις και η μέση τιμή

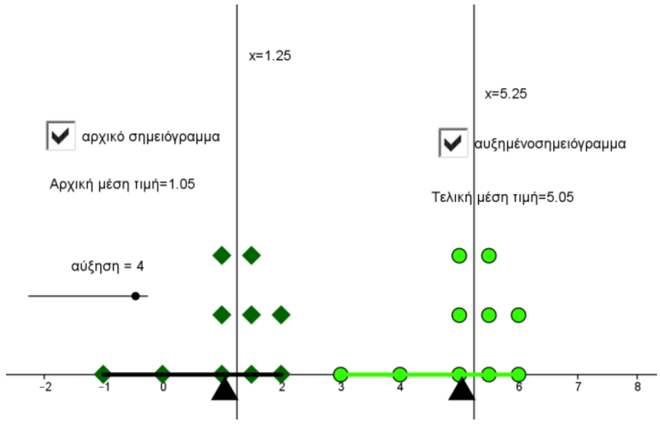
Στη συνέχεια προσθέτουμε την ακραία θερμοκρασία 12 που μετατοπίζει τη μέση τιμή «αρκετά» δεξιά. Εδώ αποτυπώνεται η διάμεσος με τιμή -1,5 που αντιπροσωπεύει το νέο δείγμα των παρατηρήσεων καλύτερα από τη μέση τιμή. Στο παρακάτω σχήμα 3 φαίνεται η θέση της διαμέσου σαν τομή μιας κατακόρυφη ευθείας με τον άξονα x΄x η οποία ευθεία χωρίζει στη μέση τις παρατηρήσεις που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά.



<u>Σχήμα 3</u> Η μέση τιμή και η διάμεσος

4. Μεταβολή των μέτρων θέσης και αναπαράστασή τους.

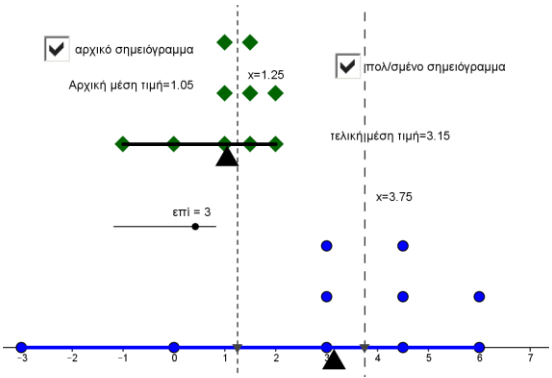
Ας υποθέσουμε τώρα ότι πρέπει να γίνει μια νέα αναφορά της μέσης τιμής αλλά σε βαθμούς Φαρενάιτ, όπου η μετατροπή απαιτεί πολλαπλασιασμό των παρατηρήσεων και πρόσθεση με μια σταθερή (F = 1,8 C + 32). Ας δούμε λοιπόν πως συμπεριφέρονται τα μέτρα θέσης αλλά και διασποράς σε μια τέτοια περίπτωση. Στο λογισμικό ένας δρομέας με όνομα *αύξηση* αυξομειώνει τις παρατηρήσεις και η επίδρασή του είναι ότι μετακινεί αριστερά-δεξιά ενιαία το σύστημα μπάρας σημείων, μέσης τιμής και διαμέσου. Δηλαδή τις μεταβολές των παρατηρήσεων ακολουθούν και η μέση τιμή αλλά και η διάμεσος. Στο παρακάτω σχήμα 4 οι θερμοκρασίες 1,1,1,2,2,1.5,1.5,1.5,0,-1 με μέση τιμή 1.05 και διάμεσο 1.2 μεταβάλλονται κατά 4 . Γίνεται επίσης φανερό ότι η θέση των παρατηρήσεων σε σχέση με τη μέση τιμή παραμένει ίδια, δεν υπάρχει αραίωση ή πύκνωσή τους (η διασπορά δεν αλλάζει).



<u>Σχήμα4</u>
Αύξηση όλων των παρατηρήσεων κατά 4. Αριστερά είναι το αρχικό σημειόγραμμα και δεξιά το τελικό αυξημένο κατά 4.

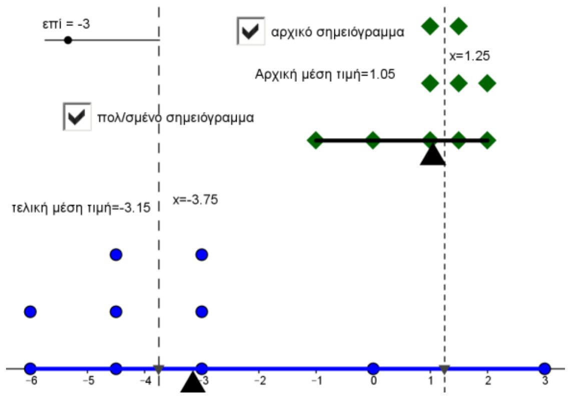
Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε τις θερμοκρασίες με το 3 (αυτό το υλοποιεί δρομέας με όνομα *επί*), τότε όπως φαίνεται στο σχήμα 5 το σύστημα μπάρας σημείων, μέσης τιμής και διαμέσου μετατοπίζεται δεξιότερα πολλαπλασιασμένο επί 3. Όμως τώρα η θέση των παρατηρήσεων σε σχέση με τη μέση τιμή δεν παραμένει ίδια, οι παρατηρήσεις «αραιώνουν» (η διασπορά αλλάζει).

Ο πολλαπλασιασμός των παρατηρήσεων επί ένα αριθμό πολλαπλασιάζει και τη μέση τιμή και τη διάμεσο (μετακινεί οριζόντια τη μπάρα του σημειογράμματος), αλλά ταυτόχρονα διογκώνει τις παρατηρήσεις, δηλαδή αυξάνει τη απόστασή τους από τη μέση τιμή.) Η διόγκωση αυτή είναι ανεξάρτητη από το πρόσημο του αριθμού, όπως φαίνεται στο σχήμα 6 όπου ο πολλαπλασιασμός των παρατηρήσεων γίνεται με το -3. Στα σχήματα 5,6 τα αρχικά σημειογράμματα ανυψώθηκαν ώστε να γίνει ευκολότερα η σύγκρισή τους με τα τελικά πολλαπλασιασμένα σημειογράμματα.



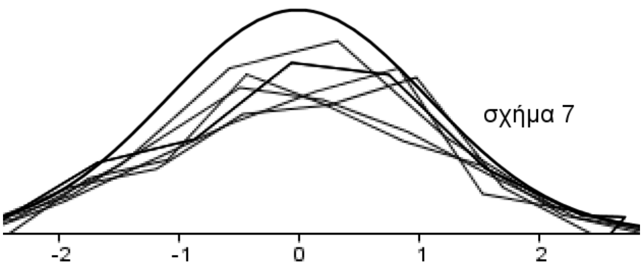
Σχήμα5 Μεταβολή όλων των παρατηρήσεων επί 3. Αριστερά το αρχικό σημειόγραμμα και δεξιά το τελικό πολλαπλασιασμένο.

<u>Σχήμα6</u>
Μεταβολή όλων των παρατηρήσεων επί -3. Δεξιά το αρχικό σημειόγραμμα και αριστερά το τελικό πολλαπλασιασμένο σημειόγραμμα



5. Η κανονική κατανομή
α) Πολύγωνο - καμπύλη συχνοτήτων, μια πειραματική προσέγγιση.

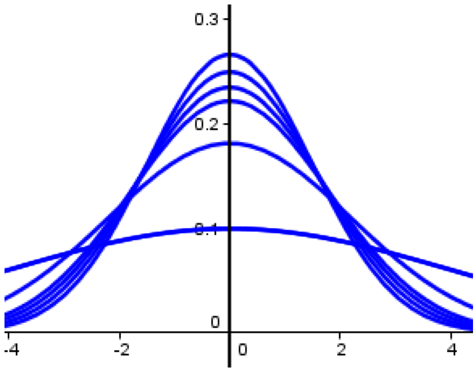
Είναι γνωστό ότι για μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων γίνεται ομαδοποίηση σε κλάσεις. Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων μιας συνεχούς μεταβλητής συνεχώς αυξάνει και το πλάτος των κλάσεων τείνει στο μηδέν, τότε το πολύγωνο συχνοτήτων τείνει να γίνει καμπύλη συχνοτήτων. Με το λογισμικό προσομοιώνουμε την προσέγγιση αυτή. Δημιουργούμε γεννήτριες σημείων που κατανέμονται ομοιόμορφα στα διαστήματα [-3,-2], [-2,-1], [-1,1], [1,2],[2,3] και



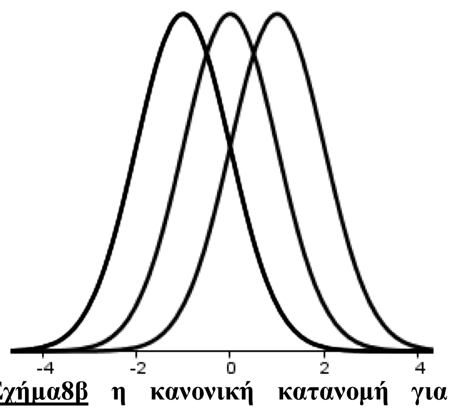
με συχνότητες 0.0235n, 0.135n, 0.68n, 0.135n, 0.0235n αντίστοιχα, όπου n ο αριθμός των παρατηρήσεων -παραγόμενων σημείων. Το n το υλοποιεί ένας δρομέας, για παράδειγμα αν στο n δώσουμε την τιμή 100 θα παραχθούν 2, 14, 68,14,2 σημεία κατανεμημένα στα παραπάνω διαστήματα. Όσο αυξάνουμε το n πληθαίνουν οι παρατηρήσεις- σημεία, δημιουργούμε κλάσεις πλήθους κ=1+3.3log10n, n ο αριθμός των παρατηρήσεων. Έτσι παράγονται δυναμικά πολύγωνα συχνοτήτων (σχήμα 7) που είναι συμμετρικά στην x=0 και προσεγγίζουν μια καμπύλη γνωστή και σαν κανονική κατανομή. Επίσης είναι γνωστή και σαν κατανομή Gauss (Gaussian distribution), για τη μεγάλη συνεισφορά του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού που το 1809 διαπίστωσε ότι τα σφάλματα στις αστρονομικές παρατηρήσεις περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή.

β) Η κανονική κατανομή και ο Z-πίνακας

Η κανονική κατανομή έχει κωδωνοειδή μορφή είναι συμμετρική και οι ουρές της προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τον οριζόντιο άξονα. Η τετμημένη της κορυφής ταυτίζεται με την μέση τιμή και την διάμεσο. Η πυκνότητα της κατανομής είναι πολύ μεγάλη γύρω από τη μέση τιμή, ενώ ο αριθμός των παρατηρήσεων μακριά της είναι πολύ μικρός. Συνήθως η καμπύλη αυτή προσεγγίζεται από τη συνάρτηση καμπύλης f(x)= $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ όπου μ,σ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα και $-\infty<x<+\infty$
Η συνάρτηση πυκνότητας αναπαριστά μια οικογένεια καμπυλών ανάλογα με τις τιμές των μ, σ. Στο λογισμικό αναπαριστούμε την f(x), αντιστοιχούμε τα μ, σ σε δρομείς (slider). Κινώντας μόνο τον σ, παράγονται με δυναμικό τρόπο κανονικές καμπύλες με σταθερό μ και μεταβαλλόμενο σ. Το χαρακτηριστικό είναι ότι όσο μειώνεται (αυξάνεται) το σ η κανονική καμπύλη ψηλώνει (χαμηλώνει) και στενεύει (πλαταίνει). Πρακτικά δηλαδή μικραίνει (μεγαλώνει) το διάστημα στο οποίο εκτείνεται η κατανομή. (αναμενόμενο αφού το εύρος μια κανονικής κατανομής είναι περίπου 6σ). Παρόμοια η κίνηση μόνο του μ διατηρεί την μορφή της καμπάνας αλλά την μετατοπίζει οριζόντια (αναμενόμενο λόγω του όρου x-μ στον τύπο της συνάρτησης). Τα παραπάνω αποτυπώνονται παρακάτω στο σχήμα 8 και μεταβάλλονται δυναμικά στο λογισμικό.



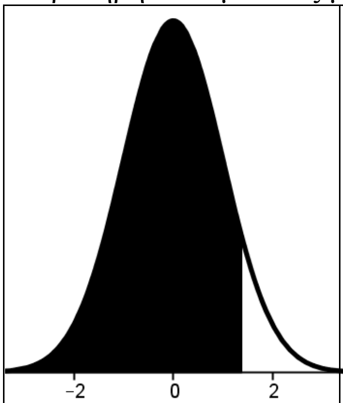
<u>Σχήμα8α</u> η κανονική κατανομή για σταθερό μ και μεταβολές του σ



<u>Σχήμα8β</u> η κανονική κατανομή για σταθερό σ και μεταβολές του μ

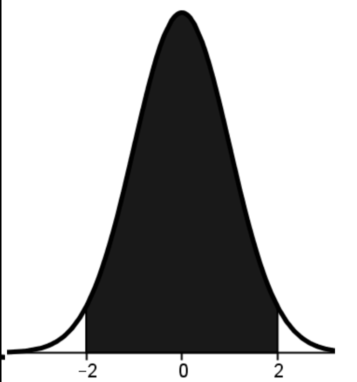
γ) Ο υπολογισμός της πιθανότητας

Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται γενικά από την συνάρτηση πυκνότητας και τον οριζόντιο άξονα ισούται με 1 και εκφράζει την πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει μια τιμή μεταξύ $-\infty$ και $+\infty$. Η τυποποιημένη κανονική κατανομή προκύπτει από την συνάρτηση πυκνότητας για $\mu=0$ και $\sigma=1$, η τυχαία μεταβλητή συμβολίζεται με Z, έχει μέγιστο στη θέση $x\approx0.4$ ενώ σημεία καμπής παρουσιάζει στις θέσεις ±1. Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, την κατακόρυφη $x=\alpha$ και τον οριζόντιο άξονα συμβολίζεται $P(z\leq\alpha)$ η απλά $\Phi(\alpha)$ και εκφράζει την πιθανότητα η μεταβλητή Z να πάρει τιμή μικρότερη ή ίση του α. Έτσι ο υπολογισμός πιθανότητας ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων επίπεδου χωρίου που στην περίπτωση της συνάρτησης πυκνότητας δεν υπάρχει αναλυτικός υπολογισμός. Έτσι χρησιμοποιούμε τον πίνακα τυποποιημένης κατανομής N(0,1) ή πιο απλά πίνακα Z, ο οποίος υπάρχει στα περισσότερα βιβλία Στατιστικής και Πιθανοτήτων. Με το λογισμικό του Geogebra παράγουμε με δυναμικό τρόπο όποια τιμή του πίνακα επιθυμούμε και αναπαριστούμε το αποτέλεσμα ως εμβαδό χωρίου. Στο σχήμα 9 παρατηρούμε: α) την τιμή του πίνακα Z για z=1.37 που είναι 0.9147 β) την γνωστή πιθανότητα 95.45% που αντιστοιχεί σε εύρος παρατηρήσεων μ-σ έως μ+σ γ) εφαρμογή της ιδιότητας $P(z\geq\alpha)=1-P(z\leq\alpha)$



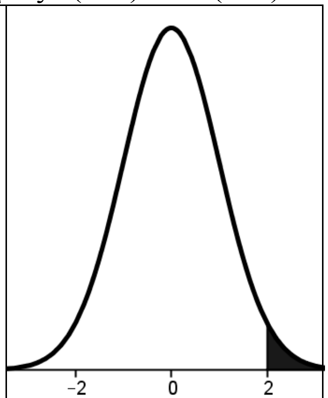
P(z≤1.37)=Φ(1.37)=0.9147

Σχήμα9α



P(-2≤z≤2)=
Φ(2)-Φ(-2)=0.9545

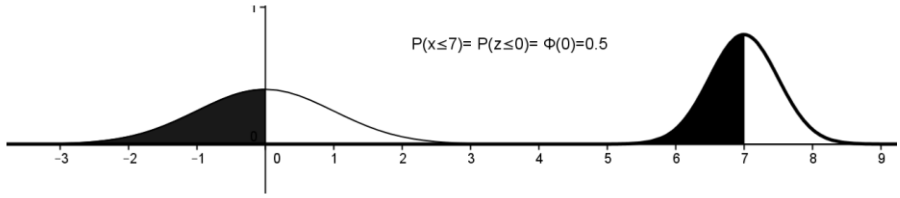
Σχήμα9β



P(z≥2)=1-P(z≤2)=
1-0.9772=0.0228

Σχήμα9γ

Μέσα από τον Z-πίνακα μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες οποιασδήποτε κανονικής κατανομής $N(\mu,\sigma^2)$. Αυτό μπορεί να γίνει λόγω του θεωρήματος: *αν X μεταβλητή μιας κανονικής κατανομής $N(\mu,\sigma^2)$ τότε η μεταβλητή $Z=(X-\mu)/\sigma$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1).* Στο λογισμικό η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υλοποιούνται με δρομείς και η κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ μετασχηματίζεται δυναμικά στην $N(0,1)$. Ένα απόσπασμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 10 όπου η κατανομή $N(7,0.5^2)$ μετασχηματίζεται στην $N(0,1)$ και αποτυπώνεται ότι $P(x \leq 7) = P(z \leq 0) = \Phi(0) = 0.5$. Πρόκειται δηλαδή για δύο ισεμβαδικά χωρία



<u>Σχήμα10</u> **Πιθανότητα 0.5 για τις κατανομές $N(0,1)$ και $N(7, 0.5^2)$**

Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή έχει σα στόχο να αναδείξει τα οφέλη της χρήσης δυναμικής αναπαράστασης με νέες τεχνολογίες στην εκπαιδευτική διαδικασία. Παρά το ότι έχουν λεχθεί πολλά σχετικά με τις αναπαραστάσεις των μαθητών για προβλήματα φυσικής και μαθηματικών, ελάχιστη έρευνα έχει γίνει για την περίπτωση της στατιστικής. Η γνωστική έρευνα στον τομέα αυτό βρίσκεται σε αρχικά στάδια και έτσι δεν είναι γνωστά πολλά σχετικά με τον τρόπο που οι μαθητές λύνουν προβλήματα στατιστικής. Είναι ανάγκη λοιπόν να πραγματοποιηθούν έρευνες που θα εξετάσουν την ικανότητα των μαθητών να αναπαριστούν με ακρίβεια προβλήματα στατιστικής και σε συνδυασμό με τη διδασκαλία μέσω της τεχνολογίας. Οι δυναμικές αναπαραστάσεις και η τεχνολογία αν χρησιμοποιηθούν σωστά έχουν να δώσουν πρόσθετα οφέλη στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Βιβλιογραφία

1. S. Papert Συνέντευξη στην εφημερίδα το Βήμα (26-7-1998)
2. Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. (2001). Θεωρίες αναπαράστασης και μάθησης των μαθηματικών.
3. Cheng, Y.C. (2000). A CMI-Triplization Paradigm for Reforming Education in the New Millennium. International Journal of Educational Management.
4. Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions.
5. Pollatsek, A. Lima, S. Well, A. D.(1981) Educational Studies in Mathematics 12, 191-204
6. www.aua.gr/gpapadopoulos Εργαστήριο Μαθηματικών & Στατιστικής .
7. Αναστασιάδου Σ. & Γαγάτσης. Α. (2005). Αναπαραστάσεις στη Στατιστική της Στ’ Δημοτικού της Ελλάδας.