ΑΡΧΑΙΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ, ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕΣΩ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

Βασική μαθηματική έρευνα στα θεωρητικά και εφαρμοσμένα μαθηματικά

Βλάστος Αιμίλιος Μαθηματικός, μεταπτυχιακός φοιτητής στο ΕΑΠ (Μεταπτυχιακές σπουδές στα μαθηματικά)
Κ.Επισκόπου 3, ΤΚ 43100, ΚΑΡΔΙΤΣΑ, email: aistos@sch.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αποσαφηνίζεται η σημασία της γεωμετρικής προόδου 1,2,4,8,16,… στις τεχνικές πολλαπλασιασμού που ανέπτυξαν και χρησιμοποίησαν αρχαίοι λαοί. Γίνεται επίσης αναφορά στη μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης και στο πως οι τεχνικές πολλαπλασιασμού εφαρμόστηκαν στη σύγχρονη εποχή στην επιστήμη της Πληροφορικής, με τη βοήθεια της παραπάνω γεωμετρικής προόδου. Τέλος δίνονται χρήσιμα ιστορικά στοιχεία.

Abstract

The importance of geometric progression 1,2,4,8.etc. is clarified in this paper, concerning the multiplication techniques developed and used by ancient people. Reference is also made to convert numbers from decimal to binary numbering system and how the multiplication techniques applied in the modern period in Computer Science, with the help of the above geometric progression. Finally important historical data is given.

Είναι γνωστό ότι κάθε φυσικός αριθμός N μπορεί να γραφεί στη δυαδική μορφή $N = \alpha_\nu \cdot 2^\nu + \ldots + \alpha_3 \cdot 2^3 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_1 \cdot 2^1 + \alpha_0 2^0 = (\alpha_\nu \ldots \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0)_2$, όπου οι συντελεστές $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ είναι τα ψηφία 0 ή 1. Δηλαδή η γεωμετρική πρόοδος 1,2, 4, 8, 16,… είναι γεννήτρια κάθε φυσικού αριθμού αρκεί να προσθέσουμε ικανό αριθμό όρων της. Π.χ. με τους όρους της 1,2, 4, 8, 16 μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον $25=1+8+16=1.2^0+0.2^1+0.2^2+1.2^3+1.2^4$, τον $21=1+4+20$. Ο μεγαλύτερος φυσικός που μπορεί να αναπαρασταθεί με τους όρους 1,2, 4, 8, 16, είναι ο $1+2+4+8+16=1.2^0+1.2^1+1.2^2+1.2^3+1.2^4=31=32-1=2.16-1=\mathbf{2.2^4-1}$

Γενικότερα με τους όρους της $2^0,2^1,2^2,2^3,\ldots,2^\nu$, ο μεγαλύτερος φυσικός που μπορεί να αναπαρασταθεί είναι ο $2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^\nu=(2^{\nu+1}-1)/(2-1)=\mathbf{2.2^\nu-1}$ (άθροισμα ν+1 όρων γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=1$, $\lambda=2$). Έστω θέλουμε να αναπαραστήσουμε τον φυσικό αριθμό 101 Θέλουμε τον μικρότερο φυσικό ν ώστε: $101\leq 2.2^\nu-1$ οπότε είναι $\nu\geq \ln 51/\ln 2\approx 5{,}67$ συνεπώς θα χρειαστούμε τους 6 πρώτους όρους. Επίσης πιο απλά, παρατηρούμε: $64-1\leq 101\leq 128-1$ οπότε είναι $2.2^5-1\leq 101\leq 2.2^6-1$, συνεπώς θα χρειαστούμε τους 6 πρώτους όρους. Επιλέγοντας τους κατάλληλους όρους αθροίσματος, αναλύουμε τον $101=1+4+32+64=1.2^0+0.2^1+1.2^2+0.2^3+0.2^4+1.2^5+1.2^6=1.2^6+1.2^5+0.2^4+0.2^3+1.2^2+0.2^1+1.2^0=(1100101)_2$

Υπάρχουν βέβαια αλγόριθμοι-διαδικασίες που αναλύουν ένα φυσικό σε δυαδική μορφή. Μία τεχνική δίδεται στον παρακάτω πίνακα1

<table>
<tr><th colspan="4">Τεχνική ανάλυσης του φυσικού 101 σε δυαδική μορφή (Πίνακας1)</th></tr>
<tr><td>Φυσικός N</td><td>ακέραιο πηλίκο του N δια 2 Ndiv2</td><td>ακέραιο υπόλοιπο του N δια 2 Nmod2</td><td>Αν παραθέσουμε τα υπόλοιπα, αρχίζοντας από το τέλος παίρνουμε τη δυαδική παράσταση του $101=(1100101)_2$</td></tr>
<tr><td>101</td><td>50</td><td>1</td><td rowspan="8">Είναι προφανές, αλλά πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όταν στη πρώτη στήλη ο αριθμός είναι περιττός (άρτιος) τότε στη τρίτη στήλη το υπόλοιπο είναι μηδέν (μονάδα).</td></tr>
<tr><td>50</td><td>25</td><td>0</td></tr>
<tr><td>25</td><td>12</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Στον ακόλουθο <u>πίνακα2</u> προσθέτουμε ακόμα μια στήλη με τον φυσικό πχ. Κ= 21 που συνεχώς διπλασιάζεται

Πίνακας2

γινόμενο 21.101

Φυσικός Ν	ακέραιο πηλίκο του Ν δια 2	ακέραιο υπόλοιπο του Ν δια 2	Φυσικός Κ
101	50	1	21
50	25	0	42
25	12	1	84
12	6	0	168
6	3	0	336
3	1	1	672
1	0	1	1344

Προσθέτουμε τώρα από τους αριθμούς της τελευταίας στήλης, εκείνους που οι αντίστοιχοι της $1^{ης}$ ($3^{ης}$) στήλης είναι περιττοί (μονάδες) 21+84+672+1344=21**.**(1+4+32+64)=21**.**$(1100101)_2$=**21.101** Στο γινόμενο αυτό σημαντικό ρόλο έπαιξε η ανάλυση του φυσικού 101 σε δυαδική μορφή. Βέβαια λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας θα μπορούσε κανείς να αναλύσει πιο εύκολα τον φυσικό 21 και όχι τον 101. Αλλά αυτό ας το δούμε στον <u>πίνακα3</u> μέσω μιας άλλης τεχνικής του πολλαπλασιασμού «**αλά ρώσικα» ή «Αιθιοπικού πολλαπλασιασμού»**.

Πολλαπλασιασμός αλά ρώσικα		**Πίνακας3**
Φυσικός Κ=21 που συνεχώς υποδιπλασιάζεται κατά ακέραιο τρόπο μέχρι να γίνει 1	Φυσικός Ν=101 που συνεχώς διπλασιάζεται	Στήλη που περιέχει τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης εφόσον τα αντίστοιχα της $1^{ης}$ στήλης είναι περιττοί αριθμοί.
21	101	101
10	202	-
5	404	404
2	808	-
1	1616	1616
άθροισμα		2121=**21.101**

Ας δούμε τώρα τον Αιγυπτιακό πολλαπλασιασμό.

Ο πολλαπλασιασμός για τους Αιγύπτιους ήταν μια διαδοχή διπλασιασμών και το γινόμενο ένα άθροισμά τους. Ήταν γνωστό τότε, ότι κάθε φυσικός ν γράφεται στη μορφή: $ν=2^α+2^β+2^γ+\ldots$, όπου α>β>γ. Το γινόμενο του ν επί έναν άλλο αριθμό μ βρίσκεται αν διπλασιάσουμε τον μ πρώτα α φορές , κατόπιν β φορές, ύστερα γ φορές κλπ. ,στο τέλος το γινόμενο προκύπτει αθροίζοντας. Πχ. για το γινόμενο 19**.**21 παρατηρούμε πρώτα ότι:16-1<19<32-1=2**.**16-1,οπότε ο 19 γράφεται σαν άθροισμα κάποιων όρων της γεωμετρικής προόδου 1,2,4,8,16

Το γινόμενο 19.21	
1*	21*
2*	42*
4	84
8	168
16*	336*
1+2+16=19	21+42+336=399

Πίνακας4

Στον διπλανό <u>πίνακα4</u>, στην πρώτη στήλη αρχίζουμε να γράφουμε όλους τους όρους της γεωμετρικής προόδου1,2,4,8,16, βάζουμε ένα διακριτικό σημάδι (πχ ένα αστερίσκο) στους όρους που αθροιζόμενοι δίνουν τον 19. Στη δεύτερη στήλη γράφουμε τον 21 και συνεχώς τον διπλασιάζουμε. Οι αντίστοιχοι αριθμοί της δεύτερης στήλης δίνουν σαν άθροισμα το γινόμενο 19.21
Πράγματι 21+42+336=21**.**(1+2+16)=21**.**19

Όταν επρόκειτο να γίνει διαίρεση οι Αιγύπτιοι ακολουθούσαν αντίστροφη πορεία δηλαδή πολλαπλασιασμό. Π.χ. στη διαίρεση 324**:**12=27,όπως φαίνεται από τον <u>πίνακα5</u>, ξεκινούσαν από τον 12, ακολουθούσαν συνεχείς διπλασιασμοί, ώστε αθροίσματά τους να δώσουν τον διαιρετέο 324 (ή τον μέγιστο φυσικό που προσεγγίζει τον διαιρετέο, σε περίπτωση διαίρεσης με υπόλοιπο διάφορο του μηδέν). Στην άλλη στήλη γράφανε τους αντίστοιχους όρους της γεωμετρικής προόδου 1,2,4,8,…

Η διαίρεση 324:12=27	
12*	1*
24*	2*
48	4

Πίνακας5

96*	8*
192*	16*
12+24+96+192=324	1+2+8+16=27

Πληροφορίες- ιστορικά σχόλια

1. Το όνομα « Αγροτικός Ρώσικος ή Αιθιοπικός Πολλαπλασιασμός», προήλθε από το γεγονός, ότι στην Ρωσία και στην Αιθιοπία χρησιμοποιήθηκε μέχρι και κατά τους νεώτερους χρόνους. Στην Ευρώπη η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε κατά τον Μεσαίωνα.
2. Το πλεονέκτημα του Ρώσικου-Αιθιοπικού αλλά και του Αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού, είναι ότι, κατά βάση, για την εκτέλεσή του, απαιτείται η γνώση μόνον τού διπλασιασμού, τού υποδιπλασιασμού, της πρόσθεσης, καθώς και ο διαχωρισμός των ακεραίων σε περιττούς και άρτιους, ενώ δεν απαιτείται να γνωρίζει κάποιος την «προπαίδεια» τού πολλαπλασιασμού. Γι' αυτό και ήταν ιδανικές για τους υπολογισμούς με τον **άβακα (Αριθμητήριον).**
3. Βασικός κανόνας του Ρώσικου-Αιθιοπικού πολλαπλασιασμού είναι, ότι αγνοούμε (δεν λαμβάνουμε υπ' όψη) τους άρτιους αριθμούς της πρώτης στήλης. Οι δε Αιθίοπες έλεγαν, ότι « οι άρτιοι αριθμοί είναι κακοί οιωνοί »!
4. Ο πολλαπλασιασμός «αλα-ρώσικα» είναι πρόγονος του Αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού.
5. Το έτος 1868 μ.Χ. ο A. Eisenlohr αποκρυπτογράφησε τον Πάπυρο του Rhind (το όνομα του πρώτου κατόχου), ένα Αιγυπτιακό έγγραφο μαθηματικού περιεχομένου. Το γραπτό αυτό εγράφη μεταξύ 1788 π.Χ. και 1580 π.Χ. Με στοιχεία μικτά της ιερογλυφικής και της ιερατικής γραφής και αποτελεί αντίγραφο αρχαιότερου κειμένου αναφερόμενου στην περίοδο 1842-1801 π.Χ. Το έγγραφο αυτό είναι μια συλλογή μαθηματικών προβλημάτων που λύνονται χωρίς απόδειξη αλλά μάλλον βασίζονται

στις παραδόσεις και τα βιώματα των λαών εκείνης της εποχής. Ένα από αυτά τα προβλήματα ήταν και η τεχνική του πολλαπλασιασμού.

6. Η μέθοδος του πολλαπλασιασμού αλά ρώσικα εφαρμόζεται σήμερα στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές γιατί είναι ταχύτατη, αφού ο πολλαπλασιασμός δύο φυσικών ανάγεται στον διπλασιασμό και υποδιπλασιασμό τους. Στην Πληροφορική αυτές οι δύο πράξεις υλοποιούνται με την ολίσθηση. Συγκεκριμένα η ολίσθηση προς τα δεξιά είναι ο υποδιπλασιασμός. Π.χ. για τον δυαδικό $(00011001)_2=1.16+1.8+0.4+0.2+1.1=(25)_{10}$, μετακινούμε όλα τα ψηφία προς τα δεξιά κατά μια θέση (το τελευταίο ψηφίο χάνεται), στο κενό που δημιουργείται από την αριστερή πλευρά εισάγεται το ψηφίο 0. Έτσι προκύπτει ο δυαδικός (00001100)2=$(12)_{10}$. Έτσι ισχύει: 12 = 25 div 2, πετύχαμε δηλαδή τον υποδιπλασιασμό του.
   Η ολίσθηση προς τα αριστερά είναι διπλασιασμός. Όλα τα ψηφία μετακινούνται προς τα αριστερά κατά μια θέση (το πρώτο ψηφίο χάνεται) Στο κενό που δημιουργείται από τη δεξιά πλευρά εισάγεται το ψηφίο 0. Έτσι ο 25= $(00011001)_2$ γίνεται $(00110010)_2$ =50

Βιβλιογραφία

1. Ιστορία των Μαθηματικών G.Loria (εκδόσεις Ε.Μ.Ε.)
2. Ανάπτυξη εφαρμογών σε προγραμματιστικό περιβάλλον Γ Γενικού Λυκείου (σχολικό εγχειρίδιο)
3. Ιστορία των Μαθηματικών KATZ J.VICTOR (μετάφραση Κώστας Χατζηκυριάκου, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
4. Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων Α Γενικού Λυκείου (σχολικό εγχειρίδιο)