

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3 ΣΤΑ ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΜΑ 1 Α

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Χαρακτηρίστε Σωστό –Λάθος τα παρακάτω

- A) η g είναι συνεχής στο 2
B) η f είναι συνεχής στο 1
Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής
Δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Μονάδες 2

Χαρακτηρίστε Σωστό –Λάθος τα παρακάτω Μονάδες 7

2. Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = K \in \mathbb{R}$, τότε κατ' ανάγκη $K > 1$.

3. Ισχύει: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1$

4. Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$.

5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

6. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f+g$ στο x_0 τότε υπάρχουν απαραίτητα και τα όρια των f, g στο x_0

7. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

μονάδες 1

8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, $l, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

κατ' ανάγκη θα είναι:

- A) $l < m$ B) $l \leq m$ Γ) $l \geq m$ Δ) $l = m$ Ε) $m < l$.

ΘΕΜΑ 1 Β

1. Να διατυπωθεί το θεώρημα του Bolzano , να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία και να γίνει σχήμα
2. Να δοθεί ο ορισμός τότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[α,β]$ μονάδες 10+5

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η $f(x)$ συνεχής στο \mathbb{R} με: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - x^2 + h^2}{h^2 x + h} = 2x$

α) να δείξετε ότι $f(x) = x^2$

β) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu \frac{1}{x}}{x^2 + x + 1} f(x)$

γ) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{f(x) + \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x + 2}$ μονάδες 8+8+9

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η $f(x)$ συνεχής στο \mathbb{R} με $(x+1)f(x) = 2x^2 + x - 1$ για κάθε $x \neq -1$

α) Βρείτε που ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού z όπου $|z - f(-1)i| = 4$

β) Βρείτε τον τύπο της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -\eta \mu \sqrt{x}$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0, \pi)$

δ) Αν χ_0 η ρίζα της εξίσωσης του γ) ερωτήματος τότε να βρείτε το

$\lim_{x \rightarrow \chi_0} \frac{\eta \mu \sqrt{x} + f(\chi_0)}{x - \chi_0}$ μονάδες 5+5+8+7

..... **ΘΕΜΑ 4**

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$, για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in [-1,1] \text{ και } f(0) = -1$$

- α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$ και να βρείτε τον τύπο της f
- γ) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1| = |z-2|$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση, το κέντρο και την ακτίνα
- δ) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να κάνετε την γραφική της παράσταση της f . Ποια η σχέση τους;

ε) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(x)}$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+f(x)}$

μονάδες 2+5+7+5+6