

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4 ΣΤΑ ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ**OEMA 1 A**

1. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[0,3]$, με

$$f(0) = 2, \quad f(1) = 1 \quad \text{και} \quad f(3) = -1.$$

Χαρακτηρίστε Σωστό –Λάθος τα παρακάτω

μονάδες 2,5

A) Υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

B) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

$$\Delta) \quad [-1, 2] \subseteq f(\Delta) .$$

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

Χαρακτηρίστε Σωστό –Λάθος τα παρακάτω

μονάδες 7

2. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0.$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

4. Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (a, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6) \cdot g(6)$.

6. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$.

$$7. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \qquad \text{τότε} \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

μονάδες 2,5

8. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x - \beta}{x - 1} = \kappa \in \mathbb{R}$,

τότε η εικόνα του Z κινείται πάνω σε μια ευθεία, της οποίας η εξίσωση είναι:

A. $y=x-1$

B. $y=x$

$\Gamma_{y=-x}$

$$\Delta.y=x+1$$

ΘΕΜΑ 1 B

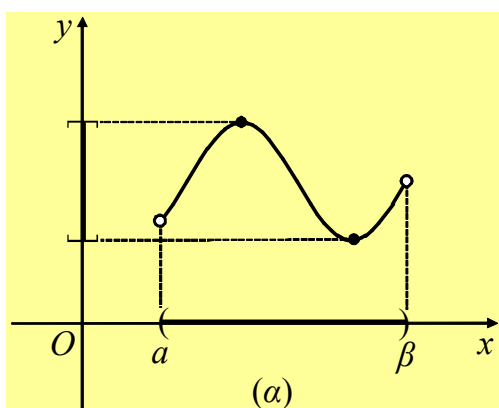
1. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

μονάδες 8

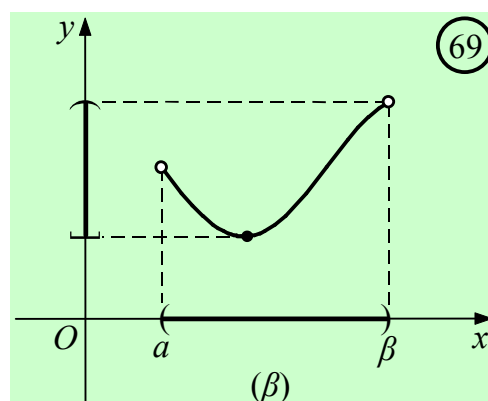
Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

Αν: η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

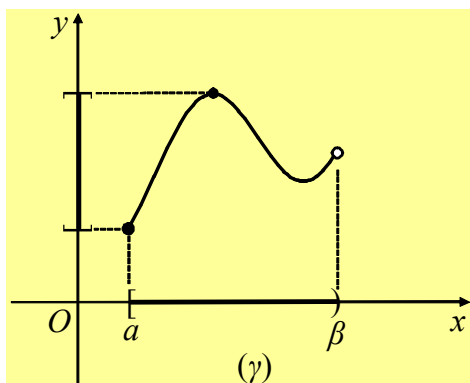
2. Σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών $f(A)$ (όπου απαιτούνται τιμές στους άξονες να τις τοποθετήσετε με γράμματα) μονάδες 5



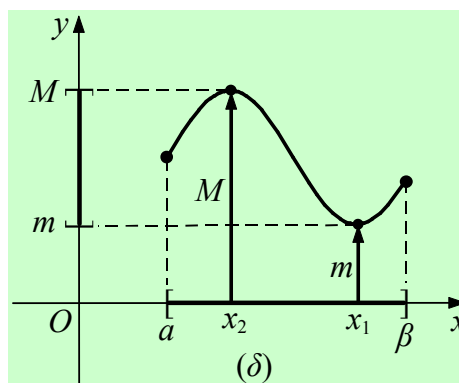
σχ1



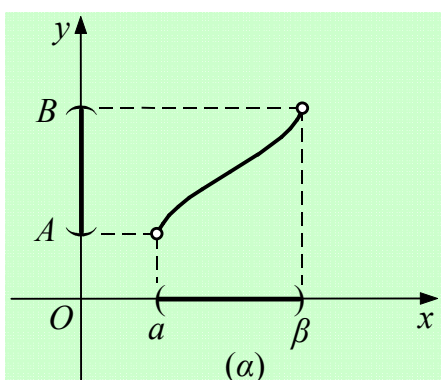
σχ2



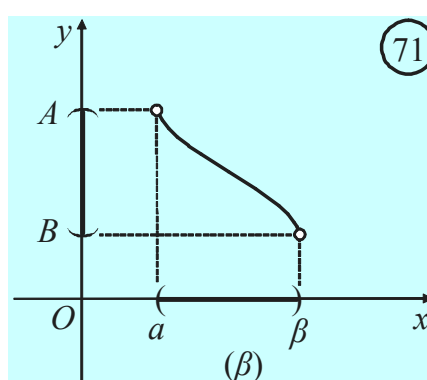
σχ3



σχ4



σχ5



σχ6

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \eta\mu x + \alpha^2 + 4}{x^2 + 1}, x \leq 0 \\ -x \ln(x+1) + (4\alpha - \beta^2), x > 0 \end{cases}$ που είναι συνεχής στο \mathbb{R}

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=0$

β) Να βρείτε το όριο της $f(x)$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$

μονάδες 10+15

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η $f(x)=2x^3+ax+\beta$, όπου $\beta<0$ και $\alpha>0$. Αν οι εικόνες του μιγαδικού $z=(1+3i) \cdot (\alpha+\beta i)$ βρίσκονται στην ημιευθεία $y=x$, $x \geq 0$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha+2\beta=0$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,1)$

γ) Να βρείτε το όριο στο $+\infty$ της συνάρτησης $\sqrt{f(x)-2x^3+x^2}-x$

δ) Αν $|z| = 10\sqrt{2}$ τότε βρείτε τον μιγαδικό z

μονάδες 8+8+4+5

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ με $f(0)=-3$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f^2(x)=1+2e^x-2e^x \cdot f(x)$

α) Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -2e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$

δ) Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού μ να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\mu$

ε) Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ να βρείτε το όριο στο $-\infty$ της $g(x)=f(\lambda x)$

Μονάδες 2+8+5+5+5