

Διαγώνισμα στις Παραγώγους
έως Ρυθμό μεταβολής

Θέμα 1 A

Να δείξετε ότι $(\sin x)' = -\eta\mu x$

B

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία τόσο λεκτικά όσο και με σχήμα

Γ Να χαρακτηρίσετε σωστό ή λάθος τα παρακάτω:

α) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h+2) - f(2)}{2h} = f'(2)$

β) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

γ) $\frac{d(\ln x + t^3)}{dt} = \frac{1}{x} + 3t^2$

δ) Αν ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους είναι αρνητικός, τότε το μέγεθος μειώνεται όσο ο χρόνος αυξάνεται

Θέμα 2 A

Δίνεται η f παραγωγίσιμη στο 0 με $f^3(x) - 2x f^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \eta\mu 2x$ για κάθε x ανήκει \mathbb{R}

α) να βρείτε τους αριθμούς $f(0)$ και $f'(0)$

β) να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x + 1}{\eta\mu x}$

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με συνεχή παράγωγο τότε να δείξετε η εξίσωση $(x-2)[f(x) + f'(x)] = -x$ έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $(0,2)$

B

Το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεταβάλλεται με ρυθμό $20 \text{ cm}^2/\text{sec}$ και μία πλευρά $x(t)$ μεταβάλλεται με ρυθμό μεταβολής $2 \text{ cm}/\text{sec}$, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της άλλης πλευράς $y(t)$ εκείνη την στιγμή t_1 που το μήκος της είναι 3 και το εμβαδό είναι 21

Θέμα 3 A

Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0
- β) Βρείτε την $f'(x)$ για κάθε διάφορο 0
- γ) Βρείτε την $f''(x)$ για κάθε διάφορο 0
- δ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1/\pi$

B

Δίνεται η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $|f(x) - 2| \leq (x - 2)^2$ για κάθε x διάφορο του 2

α) Βρείτε $f(2)$, $f'(2)$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x - 2} = 2011$ τότε να δείξετε ότι $f''(2) = 2011$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + xf'(x) = 2$ έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$

Θέμα 4

Δίνεται η $f(x) = x^3 + x + 1$ και οι ευθείες $\epsilon_\lambda : (3\lambda^2 + 1)x - y - 2\lambda^3 + 1 = 0$, λ ανήκει \mathbb{R}

α) i) Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_λ εφάπτονται στην C_f για κάθε λ ανήκει \mathbb{R} και να βρείτε το σημείο επαφής.

ii) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη στο $x = 1$ έχει με την C_f και άλλο κοινό σημείο το $K(-2, -9)$

β) i) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε το $f^{-1}(-1)$

ii) Αν η αντίστροφη της f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = -1$.