

Κύκλος

Ο κύκλος (O, ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν μια απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο O .

Ο κύκλος με κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα ρ

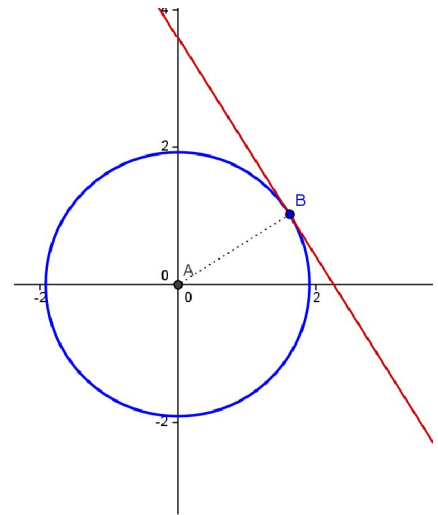
έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 = \rho^2$

Η απόδειξη στο σχολικό με Π.Θ.

Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$

έχει εξίσωση: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Η απόδειξη στο σχολικό $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, $\lambda = -x_1/y_1$, $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$



Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ

έχει εξίσωση: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

Η απόδειξη στο σχολικό με Π.Θ.

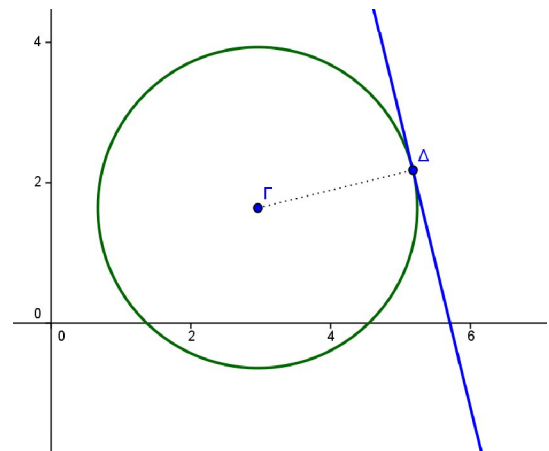
Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0, \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

παριστάνει κύκλο

με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$



Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων ο οποίος:

α) διέρχεται από το σημείο $A(2, \sqrt{2})$.

Βρείτε σημεία που είναι εσωτερικά, εξωτερικά, πάνω στον κύκλο (από ένα)

β) εφάπτεται στην ευθεία $x+y=3$

γ) εφάπτεται στην ευθεία $x=-2$

Για να γράψουμε την εξίσωση αυτού του κύκλου πρέπει να ξέρουμε την ακτίνα ρ

Πότε ρ =απόσταση του κέντρου από ευθεία;

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=2$ η οποία:

α) Διέρχεται από το σημείο $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

β) Διέρχεται από το σημείο $\Delta(2,0)$

γ) Σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία 45°

δ) Είναι κάθετη στην ευθεία $2x+y+2=0$

Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C:

Αν γνωρίζουμε το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$, η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τον τύπο $xx_1+yy_1=\rho^2$

Αν δεν γνωρίζουμε το σημείο επαφής τότε το ονομάζουμε έστω $A(x_1, y_1)$, γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο A και έχουμε

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Έχει κέντρο το σημείο $K(0,2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 0)$

β) Έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(-1,2)$ και $B(1,8)$

γ) Έχει ακτίνα $\rho=5$ και τέμνει τον άξονα x' στα σημεία $A(1,0)$ και $B(7,0)$

δ) Διέρχεται από τα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και έχει κέντρο στην ευθεία $y=x$

ε) Τέμνει τον άξονα x' στα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και τον y' στο $\Gamma(0,2)$

στ) Εφάπτεται του άξονα x' στο σημείο $A(3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $B(1,2)$

ζ) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $3x+4y=12$ στο $A(0,3)$

Για να γράψουμε την εξίσωση αυτού του κύκλου πρέπει να ξέρουμε την ακτίνα ρ και τις συντεταγμένες (x_0, y_0) του κέντρου

4. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

των κύκλων αυτών α) $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ β) $x^2+y^2-4ax+10by+4a^2+16b^2=0$

5. Αν το $A(\lambda, 3)$ ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ τότε βρείτε το $\lambda < 0$ καθώς και την εφαπτομένη του στο A.

6. Οι συντεταγμένες ενός σημείου $M(x, y)$ ικανοποιούν τις σχέσεις: $x=1+2\sin\theta$ και $y=3-2\eta\mu\theta$,

θER. Ναδειχθεί ότι τα σημεία M ανήκουν σε κύκλο. (geogebra)

Κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου και παίρνουμε μια από τις γνωστές μορφές Συνήθως λύνουμε ως προς $\sin\theta$ και $\eta\mu\theta$ και αντικαθιστούμε στην ταυτότητα $\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$

7. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των ευθειών

$\epsilon_1: \lambda x - y - 1 = 0$ και $\epsilon_2: x + \lambda y - \lambda = 0$

8. Δίνονται $\epsilon_1: \chi - \psi - 8 = 0$ και ο κύκλος $C_1: (\chi - 8)^2 + \psi^2 - 16 = 0$ που τέμνονται στα M, N

και ο κύκλος $C_2: (\chi - 8)^2 + \psi^2 - 16 + t(\chi - \psi - 8) = 0$ α) Βρείτε τα στοιχεία του κύκλου

β) ΝΔΟ τα M και N ανήκουν και στον κύκλο C_2 για κάθε t

γ) Βρείτε τον γεωμ.τόπο των κέντρων του κύκλου C_2

Δεν είναι απαραίτητο να λύσουμε το σύστημα