

Διαγώνισμα Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ Λυκείου 2015-2016

ΘΕΜΑ Α α) Απαντήστε με Σωστό-Λάθος τις παρακάτω

- 1) Αν η f παραγωγίσιμη στο x_0 και παρουσιάζει σε αυτό τοπικό ακρότατο τότε $f'(x_0)=0$.
- 2) Αν η f συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.
- 3) Αν η f συνεχής στο κ , $f'(x)>0$ στο (α,κ) και $f'(x)>0$ στο (κ,β) , τότε η f συνεχής στο (α,β) .
- 4) Η f συνεχής στο κ , $f'(x)>0$ στο (α,κ) και $f'(x)>0$ στο (κ,β) , τότε η f έχει ακρότατο το $f(x_0)$.
- 5) Η f συνεχής στο κ , $f'(x)>0$ στο (α,κ) και $f'(x)<0$ στο (κ,β) , τότε η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)$.

β) Διατυπώστε το θεώρημα του Fermat

γ) Αποδείξτε το θεώρημα του Fermat Μονάδες 10+5+10

ΘΕΜΑ Β Δίνεται η $f(x)=\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

α) να δείξετε ότι η f ορίζεται στο \mathbb{R} και ότι η εξίσωση η $f(x)=\kappa-1$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό κ

β) Αν $g(x)=-x$ τότε να ορίσετε την συνάρτηση και να δείξετε ότι $fog=-f$

γ) να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} (αντίστροφη της f) διέρχεται από το $O(0,0)$ και ότι τέμνει την $y=7$ στο $x=\ln(7 + \sqrt{50})$ Μονάδες 10+10+5

ΘΕΜΑ Γ Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$, ώστε

$$f(1)=1. \text{ Επίσης δίνεται η } g(x)=\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x+1}$$

α) Να δείξετε ότι η g ορίζεται στο $(-1,1]$

β) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, \frac{1}{2}]$

γ) Να δείξετε ότι η $h(x)=(x^2 - 1)g(x)$ έχει 2 μόνο ρίζες που είναι στο διάστημα $[0,1]$

δ) Βρείτε το όριο της συνάρτησης $g(-\frac{1}{2}) \cdot \ln x$ όταν x τείνει στο 0^+

ε) Αν η f, g παραγωγίσιμες με $g'(x)=\frac{e^{-x}}{f^2(x)} + \frac{1}{(x+1)^2}$ τότε βρείτε την συνάρτηση g .

Μονάδες 5+5+5+5+5

ΘΕΜΑ Δ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{2x}}, x > 0$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και την τέμνει σε ένα μόνο σημείο.

β) Να δείξετε ότι $^{2016}\sqrt{1008} < ^{1008}\sqrt{504} < ^{10}\sqrt{5} < ^4\sqrt{2} < ^6\sqrt{3}$

γ) Κινητό σημείο $M(x(t), \psi(t))$ κινείται στην γραφική παράσταση της f και την χρονική στιγμή t_1 που περνάει από το $A(2, f(2))$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ είναι $^4\sqrt{2}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του εκείνη τη στιγμή και να εξετάσετε αν αυξάνεται ή μειώνεται.

δ) Αν $\beta^{2\beta} + \gamma^{2\gamma} = 2 e^{\frac{1}{2e}}$ τότε να δείξετε ότι $\beta=\gamma=e$

Μονάδες 7+5+8+5