Απο τη Γεωμετρία είχαμε ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180°, τετραπλεύρου 360°, πενταγώνου $(2\cdot5-4)\cdot90^\circ=540^\circ$ εξαγώνου $(2\cdot6-4)\cdot90^\circ=720^\circ$ κλπ

Σχηματίζεται έτσι μια σειρά-ακολουθία των αριθμών $180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, 720^\circ$, κλπ.

Ας συμβολίσουμε τον πρώτο $\alpha_3 = 180^\circ$
τον δεύτερο $\alpha_4 = 360^\circ$
τρίτο $\alpha_5 = 540^\circ$
κλπ.

Οι δείκτες 3, 4, 5 αντιστοιχούν στον αριθμό πλευρών του πολυγώνου

Επειδή θέλουμε μια αντιστοιχία ο πρώτος να είναι ο α_1 ο δεύτερος να είναι ο α_2 κλπ., αλλά δεν υπάρχουν πολύγωνα με πλευρές 1 και 2 ας συμφωνήσουμε να προσθέσουμε στην αρχή της σειράς τα 0 και 0

Έτσι η νέα σειρά αριθμών είναι:

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 0, & 180^\circ, & 360^\circ, & 540^\circ, \ldots & (2\nu-4)\cdot90^\circ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_\nu \end{array}$$

Για να βρούμε τον 22ο όρο στην σειρά ένας τρόπος είναι να βρω όλους τους προηγούμενους !!

Απο φυσικά είναι χρονοβόρο.

Αφού γνωρίζω ότι ο τύπος για άθροισμα γωνιών ν-γώνου είναι $(2\nu-4)\cdot90^\circ$, τον αριθμό αυτό τον αντιστοιχώ στον ν-οστό όρο της ακολουθίας & γράφω $\boxed{\alpha_\nu=(2\nu-4)\cdot90^\circ}$

Αυτός ο ν-οστός όρος λειτουργεί ως πηγή, ως τύπος έτσι για να πάρω τον α_{22} βάζω $\nu=22$ οπότε

$$\alpha_{22} = (2\cdot22-4)\cdot90^\circ = 3600^\circ$$

Στο π.χ αυτό είναι $\alpha_\nu=(2\nu-4)\cdot90^\circ$, $\nu\geq3$ φυσικός ενώ $\alpha_1=0, \alpha_2=0$

Είναι σημαντικό σε μια ακολουθία να μας δίνουν τον ν-οστό όρο.

Παραδείγματα σχολικού: $\nu^2+\nu$, $\frac{2^\nu}{\nu^2}$, $(-1)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{\nu}$, $(-1)^{\nu+1}$

Ακολουθία Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Βλέπεις κάποιο σχέδιο εδώ;

1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8.

Δηλαδή ο κάθε όρος της ισούται με τους 2 προηγούμενους

$1+1=2$ ή $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$

Επίσης $\alpha_4=\alpha_3+\alpha_2$ και γενικότερα $\boxed{\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu}$

το πχ με τα κουνέλια

ένα ζευγάρι κουνέλια, μετά απο ένα μήνα γεννά ένα ακόμη ζευγάρι και αυτό συνεχίζεται ...έτσι ώστε κάθε νέο γευγάρι μαζί με το παλιό να αναπαράγονται...το νέο ζευγάρι έχει τον περιορισμό του ενός μηνός

το πχ με τα τετράγωνα

Αυτή είναι η πηγή για να παίρνουμε τους όρους της ακολουθίας. Λέμε τότε ότι η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά. Όταν η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά είναι απαραίτητο να δίνεται μαζί με τον αναδρομικό της τύπο κ ικανός αριθμός πρώτων όρων

Στο πχ αυτό ο ολοκληρωμένος τύπος είναι

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu \\ \text{κ' } \alpha_1=1 \text{ κ } \alpha_2=1\end{array}}$$

π.χ. σχολ. 2 σελ **124**

Πολλές φορές μπορούμε να έχουμε σε μια ακολουθία κ τους 2 τρόπους ορισμού

π.χ 1 $\alpha_\nu=2^\nu-1$ είναι γνωστός ο ν-οστός όρος κ ζητάμε τον αναδρομικό

βρίσκω τον $\alpha_{\nu+1} \xrightarrow[\text{το } \nu+1]{\text{όπου } \nu} 2^{\nu+1}-1 \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1}=2^\nu\cdot 2-1 \Leftrightarrow$

$\boxed{\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot 2-1}$ για να λειτουργήσει αυτός ο τύπος χρειαζόμαστε κ τον α_1 που είναι $\alpha_1=2^1-1=2$

έτσι $\boxed{\alpha_{\nu+1}=2\alpha_\nu-1 \text{ κ } \alpha_1=2}$

π.χ 2 $\alpha_1=1$, $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2$ να βρεθεί ο ν-οστός όρος

έχω
$$\left.\begin{array}{l}\cancel{\alpha_1}=1 \\ \cancel{\alpha_2}=\cancel{\alpha_1}+2 \\ \cancel{\alpha_3}=\cancel{\alpha_2}+2 \\ \vdots \\ \cancel{\alpha_{\nu-1}}=\alpha_{\nu-2}+2 \\ \alpha_\nu=\cancel{\alpha_{\nu-1}}+2\end{array}\right\}$$

αθροίζοντας κ μετά τις διαγραφές

$\alpha_\nu=1+\underbrace{(2+2+\dots+2)}_{\nu-1 \text{ φορές}} \Leftrightarrow \alpha_\nu=1+2(\nu-1) \Leftrightarrow \boxed{\alpha_\nu=2\nu-1}$

$\boxed{\text{Αριθμητική πρόοδος}}$ α.π.

Στην ακολουθία $4 \xrightarrow{3} 7 \xrightarrow{3} 10 \xrightarrow{3} 13, \ldots$ κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του σταθερού 3

ισχύει $7-4=3$, $10-7=3$, $13-10=3$ κλπ

Γενικά

Μια ακολουθία που κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση σταθερού αριθμού, λέγεται αριθμητική πρόοδος

ισχύει $\alpha_2-\alpha_1=\omega$, $\alpha_3-\alpha_2=\omega$, ... $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$

Το ω λέγεται διαφορά της α.π.

π.χ Γράψτε τους όρους α.π με $\alpha_1=2$ κ $\omega=-2$

Αν $\boxed{\omega>0}$ τότε η α.π είναι αύξουσα, γενικά υπάρχει η έκφραση στην καθημερινότητα να λέμε: "έχει την τάση να αυξάνεται σαν α.π" εννοώντας μια ήπια αύξηση.

Αν $\boxed{\omega<0}$ τότε η α.π είναι φθίνουσα

Γενικά είναι $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$ στο π.χ $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=3$

έχουμε δηλ. έναν αναδρομικό τύπο

που είναι μειονέκτημα όταν θέλω να βρω ένα μεγάλο όρο π.χ α_{100}

Μάθαμε όμως έναν αναδρομικό τύπο να τον κάνουμε γενικό τύπο

έτσι

$$\begin{aligned}
\cancel{\alpha_1} &= \alpha_1 \\
\cancel{\alpha_2} &= \cancel{\alpha_1}+\omega \\
\cancel{\alpha_3} &= \cancel{\alpha_2}+\omega \\
&\vdots \\
+\quad \alpha_\nu &= \cancel{\alpha_{\nu-1}}+\omega \\
\hline
\alpha_\nu &= \alpha_1+(\omega+\omega+\cdots+\omega)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1+(\nu-1)\omega} \quad (1)$$

στο π.χ

$$\begin{aligned}
\cancel{\alpha_1} &= 4 \\
\cancel{\alpha_2} &= \cancel{\alpha_1}+3 \\
\cancel{\alpha_3} &= \cancel{\alpha_2}+3 \\
&\vdots \\
+\quad \alpha_\nu &= \cancel{\alpha_{\nu-1}}+3 \\
\hline
\alpha_\nu &= 4+(3+3+\cdots+3)
\end{aligned}$$

$$\alpha_\nu = 4+(\nu-1)\cdot 3 \quad (2)$$

Είναι ο γενικός όρος μιας α.π κ λειτουργεί με δεδομένα τον α_1 και το ω

π.χ $4, 7, 10, 13, \ldots$ είναι α.π αφού έχει σταθερές διαφορές $=3$

έχει $\alpha_1=4$ οπότε $(1) \xrightarrow[\omega=3]{\alpha_1=4} \alpha_\nu = 4+(\nu-1)\cdot 3$

όπως είδαμε κ στην (2)

Αθροισμα ν διαδοχικών όρων α.π

Λέγεται ότι ο Μαθηματικός Gauss όταν σε μικρή ηλικία κλήθηκε να προσθέσει τους 1, 2, 3, 4, ..., 98, 99, 100 έκανε το εξής

$$1+2+3+4+\cdots+98+99+100=$$

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

$$=101+101+\cdots+101+101=50\cdot101=\frac{100}{2}\cdot(100+1)=5050$$

Γενικότερα $1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu}{2}(\nu+1)$

Ακολουθώντας μια παρόμοια μέθοδο αποδειξης ισχύει $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu=\nu\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}$ συμβ. με S_ν το άθροισμα

οπότε $$\boxed{S_\nu=\frac{\nu}{2}\cdot(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]}$$

Παράδειγμα

Πόσους πρώτους όρους θα πάρουμε απο την 4, 8, 12, ... ώστε να σχηματίσουμε άθροισμα 180;

Λύση

α' τρόπος $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ (1) εύρεση $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=4+(\nu-1)\cdot4=4\nu$

$S_\nu=180$, ν άγνωστος, $\alpha_1=4$, $\alpha_\nu=4\nu$

οπότε (1) $\Rightarrow$ $180=\frac{\nu}{2}(4+4\nu)\Leftrightarrow 360=4\nu+4\nu^2\Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0$

$\Delta=36$, $\nu=9$ ή $\nu=-10$ απορρ.

β' τρόπος

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]\Leftrightarrow$$

$$180=\frac{\nu}{2}\left[8+(\nu-1)\cdot4\right]\Leftrightarrow 180=4\nu+2\nu^2-2\nu\Leftrightarrow$$

$\nu^2+\nu-90=0$ $\nu=9$ ή $\nu=-10$ απορρ αφου ν φυσικος

<u>Παραδείγματα</u> 1. Βρείτε τον α_{50} της $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots$

(α) $\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$, $\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$ άρα έχουν σταθερή διαφορά

(β) Έχω $\alpha_1=1$, $\omega=\frac{2}{3}$

(γ) Είναι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu=1+(\nu-1)\frac{2}{3}$

(δ) οπότε $\alpha_{50} \overset{\nu=50}{=\!=\!=} 1+(50-1)\frac{2}{3}=1+\frac{98}{3}=\frac{101}{3}$

2. Σε μια α.π με $\alpha_1=7$, $\omega=-2$ Ποιος όρος ισούται με -81;

έχω $\alpha_1=7$, $\omega=-2$

επίσης $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega$, ψάχνω τον όρο δηλ. το ν

οπότε θεωρώ $\alpha_\nu=-81$

Έτσι $-81=7+(\nu-1)\cdot(-2)$

$\Leftrightarrow -88=-2\nu+2 \Leftrightarrow 2\nu=90 \Leftrightarrow \nu=45$

άρα είναι ο $45^{ος}$ όρος

$\boxed{\text{Αριθμητικός μέσος}}$

$2, 8, 14, 20, \dots$ Παίρνω την τριάδα $\underbrace{2, \overset{2\cdot 8=16}{8}, 14}_{2+14=16}$

Παίρνω την τριάδα $\underbrace{8, \overset{2\cdot 14=28}{14}, 20}_{8+20=28}$

Δεν είναι τυχαίο αφού: $\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}$

$\alpha_{11}=\alpha_1+10\omega \Rightarrow 2\alpha_{11}=2\alpha_1+20\omega$

$\alpha_{10}+\alpha_{12}=\alpha_1+9\omega+\alpha_1+11\omega=2\alpha_1+20\omega$

Έτσι αν α, β, γ διαδοχικοί όροι α.π τότε

$\boxed{2\beta=\alpha+\gamma}$