Η Άσκηση τού μηνός

Μάρτιος 2007

Άσκηση 3.1-2007 (Για μαθητές Β΄- Γ΄ Γυμνασίου, Α΄-Β΄-Γ΄ Λυκείου).
Εξετάστε την σχέση διατάξεως (<, >, =) μεταξύ τών δύο αριθμών 123^{246} και 246^{123} .
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

Μέθοδος 1η

(Η λύση που ακολουθεί αναφέρεται στις γνωστικές δυνατότητες τών μαθητών Β΄- Γ΄Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου)

Παρατηρούμε, ότι: $123^{246} = 123^{123.2}$.
Θέτουμε: 123=ν, οπότε: $123^{246} = 123^{123.2} = (\nu)^{2.\nu} = (\nu^2)^{\nu} = (\nu.\nu)^{\nu}$.
Αλλά, $(\nu.\nu)^{\nu} > (2.\nu)^{\nu}$, διότι ν=123>2 . Οπότε: $123^{246} = (\nu.\nu)^{\nu} > (2.\nu)^{\nu} = (123.2)^{\nu} = 246^{123}$. Δηλαδή: $\mathbf{123^{246} > 246^{123}}$.-

Εναλλακτικός τρόπος

Επειδή οι αριθμοί 123^{246} και 246^{123} είναι θετικοί, μπορούμε να συγκρίνουμε το κλάσμα $\dfrac{123^{246}}{246^{123}}$ με την μονάδα. Έχουμε, λοιπόν:

$$\frac{123^{246}}{246^{123}} = \frac{123^{(123.2)}}{(123.2)^{123}} = \frac{(123^{123})^2}{123^{123}.2^{123}} = \frac{\cancel{123^{123}}.123^{123}}{\cancel{123^{123}}.2^{123}} = \frac{123^{123}}{2^{123}} = (\frac{123}{2})^{123} > (1)^{123} = 1$$

Δηλαδή: $\dfrac{123^{246}}{246^{123}} > 1$. Άρα $\mathbf{123^{246} > 246^{123}}$.-

Μέθοδος 2η

(Στην λύση που ακολουθεί χρησιμοποιούνται γνώσεις τής Β΄και τής Γ΄ Λυκείου)
Θα χρησιμοποιήσουμε τους λογαρίθμους:

Με δεδομένο, ότι η συνάρτηση f(x)=logx (λογάριθμος με βάση το 10) είναι γνησίως αύξουσα, θα συγκρίνουμε τους λογαρίθμους:
$\log(123^{246})$ **και** $\log(246^{123})$. **Θεωρούμε την διαφορά:** $\log(123^{246}) - \log(246^{123}) =$

$$= \log(\frac{123^{246}}{246^{123}}) = \log(\frac{123^{123.2}}{(123.2)^{123}}) = \log(\frac{(123^{123})^2}{123^{123}.2^{123}} = \log(\frac{\cancel{123^{123}}.123^{123}}{\cancel{123^{123}}.2^{123}}) = \log(\frac{123}{2})^{123} =$$

$$= 123.\log(\frac{123}{2}) > 123.\log 1 = 123.0 = 0$$ **[αφού** $\dfrac{123}{2} > 1$**, τότε και** $\log(\dfrac{123}{2}) > \log 1 \Rightarrow \log(\dfrac{123}{2}) > 0$ **]**

Επομένως $\log(123^{246}) - \log(246^{123}) > 0$, και τότε: $\log(123^{246}) > \log(246^{123})$. Επειδή , δε, η συνάρτηση logx είναι γνησίως αύξουσα, τότε και $\mathbf{123^{246} > 246^{123}}$.

Μέθοδος 3η (Γενική)

Αφού διαπιστώσουμε, ότι: 246=2Χ123, θέτουμε 123=α. Τότε 246=2.α. Και τότε: $\mathbf{123^{246} = \alpha^{2.\alpha}}$, ενώ $\mathbf{246^{123} = (2.\alpha)^{\alpha}}$.Συγκρίνουμε το κατωτέρω κλάσμα με την μονάδα:

$$\frac{123^{246}}{246^{123}} = \frac{a^{2.a}}{(2.a)^a} = \frac{a^a.a^a}{2^a.a^a} = \frac{a^a}{2^a} = (\frac{a}{2})^a > 1$$ **, για όλα τα α>2, όπως συμβαίνει εδώ, που είναι α=123>2. Άρα:** $\dfrac{123^{246}}{246^{123}}$ **>1, και επομένως** $\mathbf{123^{246} > 246^{123}}$ **.-**

Παρατήρηση: Εκ τών ανωτέρω προκύπτει η γενική διαπίστωση: $\mathbf{\alpha^{2.\alpha} > (2.\alpha)^{\alpha}}$ **,** $\forall$ **α>2.**

Έτσι, ισχύουν, π.χ: $\mathbf{3^6 > 6^3}$, $\mathbf{5^{10} > 10^5}$, $\mathbf{20^{40} > 40^{20}}$, $\mathbf{81^{162} > 162^{81}}$, $(\frac{14}{3})^{\frac{28}{3}} > (\frac{28}{3})^{\frac{14}{3}}$ **, κλπ.-**