ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 224. Παράγωγος βασικών συναρτήσεων)

Αν x_0 είναι ένα σημείον τού $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0{}^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x.x_0{}^{\nu-2}+x_0{}^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x.x_0{}^{\nu-2}+x_0{}^{\nu-1}$$

οπότε, το όριο: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}.x_0+\ldots+x.x_0{}^{\nu-2}+x_0{}^{\nu-1})=$

$=x_0{}^{\nu-1}+x_0{}^{\nu-2}.x_0+\ldots+x_0.x_0{}^{\nu-2}+x_0{}^{\nu-1}=\nu.x_0{}^{\nu-1}$. Δηλαδή, υπάρχει η παράγωγος τής $f(x)=x^{\nu}$, για $\nu\neq 0,1$, στο τυχόν σημείο $x_0\in\mathbb{R}$, και είναι: $f'(x_0)=(x^{\nu})'_{x=x_0}=\nu.x_0{}^{\nu-1}$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$. Άρα, $\underline{f'(x)=(x^{\nu})'=\nu.x^{\nu-1}}$. ό.έ.δ.

2. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 149. Μονότονες συναρτήσεις- ορισμός)

Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ τού πεδίου ορισμού της**,** εάν και μόνον εάν:
για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$, με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

Β. **1** $\to$ **Λάθος** (Το σωστό είναι: $|z|^2=z.\bar{z}$, Μέτρο Μιγαδικού αριθμού, σελ. 97)

2 $\to$ **Σωστό** (Συνάρτηση 1-1, σελ. 151, ορισμός.)

3 $\to$ **Σωστό** (Ιδιότητες ορίων-σελ. 165, Θεώρημα 1ο)

4 $\to$ Σωστό (Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής, σελ. 195)

5 $\to$ **Λάθος** (Το σωστό είναι: $f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$, γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$)

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε τους μιγαδικούς αριθμούς: $z=(\lambda-2)+2\lambda i$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Οι εικόνες τών μιγαδικών $z=(\lambda-2)+2\lambda i$, με $\lambda\in\mathbb{R}$, είναι τα σημεία $M(x,y)$, με $\begin{cases} x=\lambda-2 \\ y=2\lambda \end{cases}$,

όπου $\lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=x+2\\ y=2\lambda\end{cases}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2(x+2)\\ x,y\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x+4\\ x,y\in\mathbb{R}\end{cases}$.

Η τελευταία εξίσωση μάς εξασφαλίζει, **ότι ο Γ.Τ. τών σημείων** $M(x,y)$, εικόνων τών μιγαδικών αριθμών $z=(\lambda-2)+2\lambda i$, με $\lambda\in\mathbb{R}$, **είναι η ευθεία με εξίσωση:** $y=2x+4, x\in\mathbb{R}$

β) Από την υπόθεση ισχύει: $z+\bar{z}=2$, οπότε: $z+\bar{z}=2\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z)=2\Leftrightarrow\operatorname{Re}(z)=1$, και, επειδή $\operatorname{Re}(z)=\lambda-2$, θα έχουμε ισοδυνάμως: $\lambda-2=1\Leftrightarrow\lambda=3$.
Τώρα, για $\lambda=3$, ο δεδομένος μιγαδικός γίνεται: $z=(3-2)+2.3.i=1+6i$.
Επομένως: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+6i}=\dfrac{1-6i}{(1+6i)(1-6i)}=\dfrac{1-6i}{1+6^2}=\dfrac{1-6i}{37}=\dfrac{1}{37}-\dfrac{6}{37}.i$, και γι' αυτό: $\operatorname{Re}(\dfrac{1}{z})=\dfrac{1}{37}$, όπερ και το ζητούμενον.

γ) Είναι: $|z|=2\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda-2)^2+(2\lambda)^2}=2\Leftrightarrow 5\lambda^2-4\lambda+4=4\Leftrightarrow 5\lambda^2-4\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(5\lambda-4)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{4}{5}$.

- Για $\lambda = 0$, είναι $z = (0-2) + 2.0..i = -2 + 0.i$ και γι' αυτό λαμβάνουμε $\mathrm{Im}(z) = 0$, το οποίον είναι άτοπον, αφού από την υπόθεση μάς δίδεται, ότι $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. Άρα, η τιμή $\lambda = 0$ απορρίπτεται.

Επομένως, είναι υποχρεωτικώς $\lambda = \frac{4}{5}$, όπερ και το ζητούμενον.

ΘΕΜΑ 3º

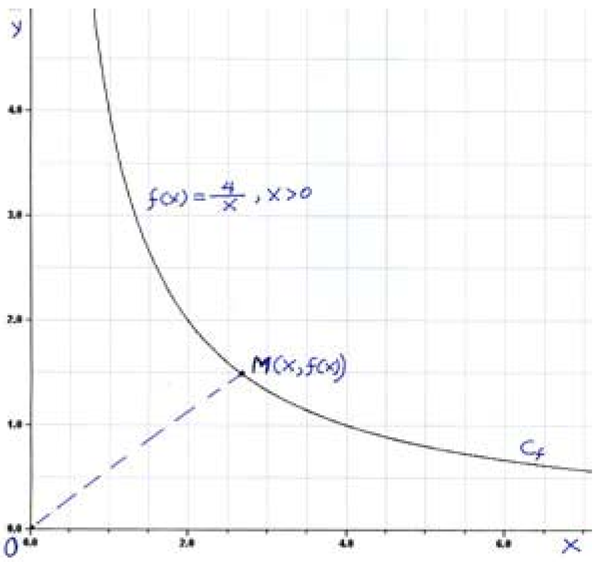
Δεδομένη είναι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}$, με $x > 0$.

α) Είναι: $f'(x) = (\frac{4}{x})' = -\frac{4}{x^2}$, με $x > 0$.

ι) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\frac{4}{x^2}}{\frac{4}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{1}{x}) = \mathbf{0}$

ιι) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{xf(x)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x.\frac{4}{x}}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{4}{(x-2)^2} = +\infty$

β) Έστω $M(x, f(x))$ ένα τυχόν σημείο τής γραφικής παράστασης C_f τής συναρτήσεως f.



Η απόσταση d(x) τού σημείου $M(x, f(x))$ από την αρχή O(0,0) τών αξόνων είναι:

$d(x) = (OM) = \sqrt{x^2 + f^2(x)} = \sqrt{x^2 + (\frac{4}{x})^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}$, με $x \in \mathbb{R}$.

Για να βρούμε πότε η απόσταση (OM) είναι μικρότερη, θα βρούμε το ελάχιστο τής συναρτήσεως: $d(x)$.

Είναι: $d'(x) = \left(\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}\right)' = \frac{(x^2 + \frac{16}{x^2})'}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{2x - \frac{32}{x^3}}{2.\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{x^4 - 16}{x^2.\sqrt{x^4 + 16}}$, με $x > 0$.

Είναι: $d'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$. Αλλά, αφού $x > 0$, δεκτή είναι μόνον η ρίζα $\underline{x = 2}$.
Επίσης:
$d'(x) > 0 \Leftrightarrow x^4 - 16 > 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ ή $x < -2$. Δεκτό μόνον $\underline{x > 2}$, αφού $x > 0$.

Και $d^{'}(x)<0 \Leftrightarrow x^4-16<0 \Leftrightarrow (x^2+4)(x^2-4)<0 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2$, και επειδή $x>0$ θα είναι $\underline{d^{'}(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<2}$

Τα ανωτέρω συμπεράσματα συνοψίζονται στον κάτωθι πίνακα:

x	0		$+2$		$+\infty$
$d^{'}(x)$		-	0	+	
$d(x)$		↘		↗	

Ολικό ελάχ.

Επομένως, το σημείο τής C_f , που απέχει από την αρχή τών αξόνων την μικρότερη απόσταση, είναι για $x=2$, δηλαδή το σημείο: $M(2, f(2))$ ή $M(2,2)$. Όπερ και το ζητούμενον.

γ) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο τής C_f .

Η παράγωγος τής f στην θέση x_0 είναι: $f^{'}(x_0)=-\dfrac{4}{{x_0}^2}$, και ο συντελεστής διευθύνσεως τής εφαπτομένης (ε) στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{4}{{x_0}^2}$.

Τώρα, η εφαπτομένη (ε) θα είναι παράλληλος προς την ευθεία με εξίσωση $y=-2x+6$, εάν και μόνον εάν $-\dfrac{4}{{x_0}^2}=-2 \quad (1) \Leftrightarrow {x_0}^2=2 \Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{2}$. Αλλά, είναι $x>0$, οπότε η εξίσωση (1) **έχει μοναδική λύση,** την $x_0=\sqrt{2}$. Αυτό σημαίνει, ότι το σημείο τής C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλος προς την $y=-2x+6$, **<u>είναι μοναδικό</u>** : $A(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

ΘΕΜΑ 4ο

Η δεδομένη συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει και η τιμή $f(0)$. Ο τύπος, που δίνει τις τιμές της είναι $xf(x)=x+2\eta\mu x$ για κάθε $x\neq 0$, ενώ δεν γνωρίζουμε την τιμή $f(0)$.

α) Είναι, λοιπόν, $xf(x)=x+2\eta\mu x$, για κάθε $x\neq 0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+2\eta\mu x}{x}$ για κάθε $x\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=1+2\dfrac{\eta\mu x}{x}$ για κάθε $x\neq 0$.

Αφού η f ορίζεται και στο $x=0$ και η f συνεχής παντού σο $\mathbb{R}$, τότε θα είναι

$\underline{f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)} == \lim\limits_{\delta x\to 0}\left(1+2\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1+2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1+2.1=3$, **δεδομένου ότι:** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1$**(από την Θεωρία). Δηλαδή,** $\underline{f(0)=3}$**, όπερ και το ζητούμενον.**

β) Θα δείξουμε, ότι: $f(x)<3$ **γιά κάθε** $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

Είναι $f(x)<3$**, γιά κάθε** $x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 1+2\dfrac{\eta\mu x}{x}<3$ **γιά κάθε** $x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2\dfrac{\eta\mu x}{x}<2$ **γιά κάθε** $x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{x}<1$ **γιά κάθε** $x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \underline{\eta\mu x<x}$, γιά κάθε $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$**. Η τελευταία σχέση είναι αληθής (από Θεωρία). Άρα αληθής είναι και η αρχική:** $f(x)<3$**, γιά κάθε** $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$**. ό.έ.δ.**

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση g **, με τύπο** $g(x) = f(x) - 2$**, στο διάστημα** $[\frac{\pi}{2}, \pi]$**.**

Είναι: $g(x) = f(x) - 2 = 1 + 2\frac{\eta\mu x}{x} - 2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{g(x) = 2\frac{\eta\mu x}{x} - 1, \text{ με } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]}$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$**, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Επί πλέον:**

* $g(\frac{\pi}{2}) = 2\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{4-\pi}{\pi} > 0$ **(1)**

* $g(\pi) = 2\frac{\eta\mu\pi}{\pi} - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$ **(2)**

Επομένως, από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ **τουλάχιστον μία ρίζα τής εξισώσεως** $g(x) = 0$**, δηλαδή τής εξισώσεως** $f(x) - 2 = 0$**.**

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 2$ **έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα** $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$**. ό.έ.δ. -**

---------------- ... .

Επιμέλεια Λύσεων: **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**