ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1º

Α1. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 98. Μέτρο Μιγαδικού αριθμού- ιδιότητα)

Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| \Leftrightarrow |z_1.z_2|^2 = (|z_1|.|z_2|)^2 \Leftrightarrow (z_1.z_2).(\overline{z_1.z_2}) = z_1\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2} \Leftrightarrow \underline{z_1.z_2.\overline{z_1}.\overline{z_2} = z_1\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2}}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει προφανώς, άρα ισχύει και η αρχική. ό.έ.δ.

Α2. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 141. Ισότητα συναρτήσεων- ορισμός)

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες,** εάν και μόνον εάν:

* έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A , και

* για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = g(x)$

Α3. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 280. Ασύμπτωτοι καμπύλης-ορισμός)

Εάν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτος** τής γραφικής παραστάσεως τής f στο $+\infty$.

Β. <u>**α**</u> $\to$ <u>**Λάθος**</u> (Εσφαλμένη διατύπωση τού Θ. 3º –σελ. 332, τού οποίου η ακριβής διατύπωση έχει ως εξής: « Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [a , β]. Εάν για κάθε $x \in [a,\beta]$ ισχύει $f(x) \ge 0$ **και η συνάρτηση** f **δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό**, τότε $\int_a^\beta f(x)dx > 0$ »)

<u>**β**</u> $\to$ <u>**Λάθος**</u> (Είναι διατύπωση τού αντιστρόφου τού Θεωρήματος: « Έστω f μία συνάρτηση, συνεχής σε διάστημα Δ. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο τού Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ ». Όπως γνωρίζουμε, το αντίστροφο αυτού τού Θεωρήματος δεν ισχύει γενικώς).

<u>**γ**</u> $\to$ <u>**Λάθος**</u> (Εσφαλμένη διατύπωση τού Θεωρήματος τής σελίδος 190, τού οποίου η ακριβής διατύπωση έχει ως εξής: « Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής **στο** $\underline{f(x_0)}$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 »)

<u>**δ**</u> $\to$ <u>Σωστό</u> [Δεύτερο σχόλιο επί τού Θ. τής σελίδος 334: $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$)]

<u>**ε**</u> $\to$ <u>**Σωστό**</u> (Όριο εκθετικής συναρτήσεως-σελ. 185)

ΘΕΜΑ 2º

Έχουμε τον μιγαδικόν αριθμό: $z = \dfrac{2+a.i}{a+2.i}$, με $a \in \mathbb{R}$.

α) Προφανώς, πρέπει να δείξουμε, ότι: $|z| = 1$, ώστε η εικόνα τού μιγαδικού z, να ευρίσκεται επάνω στον κύκλο , κέντρου Ο(0,0) και ακτίνος ρ=1.

Έχουμε:

$$|z|^2 = z.\overline{z} = \frac{2+a.i}{a+2.i}.\overline{\left(\frac{2+a.i}{a+2.i}\right)} = \frac{2+a.i}{a+2.i}.\frac{\overline{2+a.i}}{\overline{a+2.i}} = \frac{2+a.i}{a+2.i}.\frac{2-a.i}{a-2.i} = \frac{(2+a.i)(2-a.i)}{(a+2.i).(a-2.i)} = \frac{2^2-a^2.i^2}{a^2-2^2.i^2} =$$

$= \dfrac{4+a^2}{a^2+4} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Άρα η εικόνα τού μιγαδικού $z = \dfrac{2+a.i}{a+2.i}$, με $a \in \mathbb{R}$, ευρίσκεται επάνω στον κύκλο , κέντρου Ο(0,0) και ακτίνος ρ=1.

β) ι) Για $a = 0$, είναι $z_1 = \dfrac{2+0.i}{0+2.i} = \dfrac{2}{2.i} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = -i$, και

για $a = 2$, είναι $z_2 = \dfrac{2+2.i}{2+2.i} = 1$. Επομένως, η απόσταση τών δύο μιγαδικών z_1 και z_2 είναι:

$\left|z_1 - z_2\right| = \left|-i-1\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, όπερ το ζητούμενον.

ιι) $(z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = [(-i)^2]^\nu = (-1)^\nu$, και $(-z_2)^\nu = (-1)^\nu$. Επομένως: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$, ό.έ.δ.

ΘΕΜΑ 3[ο]

Έχουμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, όπου $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και, ως πολυωνυμική, είναι παντού παραγωγίσιμη.
Είναι: $f^{'}(x) = 3x^2 - 3, x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $f^{'}(x) = 3x^2 - 3$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίζεται επ' αυτού, δηλαδή υπάρχει παντού η $f''(x) = 6x$.

1) $f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$ $\underline{x=1}$ ή $\underline{x=-1}$

2) $f^{'}(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow$ $\underline{x<-1}$ ή $\underline{x>1}$

3) $f^{'}(x) < 0 \Leftrightarrow$ $\underline{-1<x<1}$

4) $f^{''}(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow$ $\underline{x=0}$

5) $f^{''}(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow$ $\underline{x>0}$

6) $f^{''}(x) < 0 \Leftrightarrow 6x < 0 \Leftrightarrow$ $\underline{x<0}$

Τα ανωτέρω συμπεράσματα συνοψίζονται στον κάτωθι πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f^{'}(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f^{''}$		-		-	0	+		+	
$f(x)$		↗ ∩		↘ ∩		↘ ∪		↗ ∪	

Τοπ. Μέγ. **Σημ. καμπής** **Τοπ. Ελάχ.**

Η τελευταία γραμμή τού πίνακα συνοψίζει τα εξής συμπεράσματα:
α) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα: $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$
β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,+1]$

Επομένως, ως παραγωγίσιμη παντού, η f παρουσιάζει τα εξής <u>δύο τοπικά ακρότατα</u>:

Τοπικό μέγιστο το $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2\eta\mu^2\theta == 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1-\eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$,

Τοπικό ελάσιστο το $f(1) = 1^3 - 3.1 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1+\eta\mu^2\theta)$.

γ) Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty,0]$
δ) Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Επομένως, ως δύο φορές παραγωγίσιμη παντού, η f παρουσιάζει <u>σημείο καμπής</u> στην θέση $x_0 = 0$. Το σημείο καμπής είναι : $A(0, f(0))$ **, δηλαδή** $A(0,-2\eta\mu^2\theta)$.

β) Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι πολυωνυμική 3[ου] βαθμού, αυτή θα έχει το πολύ τρείς πραγματικές ρίζες. Θα βρούμε το σύνολο τιμών τής f σε κάθε διάστημα μονοτονίας της.

- **Στο διάστημα** $(-\infty,-1] = \Delta_1$, η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επομένως, το σύνολο τιμών εδώ είναι: $f(\Delta_1) = f((-\infty,-1]) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-1)]$, ενώ

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$ και $f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$. Άρα

  $\underline{f(\Delta_1) = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]}$. Επειδή, δε, $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε $\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$. Είναι φανερό, τώρα, ότι το μηδέν (0) ανήκει στο σύνολο $\underline{(-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]}$, επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μέσα στο σύνολο

$(-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$ τουλάχιστον μία ρίζα. Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, τότε η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$. Ομοίως,

- **Στο διάστημα** $[-1,+1] = \Delta_2$, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής. Άρα $f(\Delta_2) = f([-1,+1]) = [f(+1), f(-1)] = [-2(1+\eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$, διάστημα εις το οποίον ανήκει το μηδέν (0). Άρα, και στο διάστημα $[-1,+1] = \Delta_2$ η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα. Ομοίως,
- **Στο διάστημα** $[+1,+\infty) = \Delta_3$**,** η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Άρα, $f(\Delta_3) = f([+1,+\infty)) = [f(+1), \lim_{x\to+\infty} f(x) = [-2\sigma\upsilon\nu^2\theta, +\infty)$, αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$.
  Το διάστημα $[-2\sigma\upsilon\nu^2\theta, +\infty)$ περιέχει το μηδέν(0), και επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ_3 **=** $[+1,+\infty)$ **.**

Από τα ανωτέρω προκύπτει, ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρείς ρίζες πραγματικές.
Κατωτέρω δίδουμε και έναν άλλον τρόπο απάντησης στο ερώτημα 3β)(1)

γ) * $x_1 = -1$, η θέση τού τοπικού μεγίστου. Και $f(x_1) = f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$. Το σημείο τού τοπικού μεγίστου είναι: $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, και εύκολα διαπιστώνουμε, ότι οι συντεταγμένες τού σημείου $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$ επαληθεύουν την εξίσωση τής ευθείας $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. Άρα, το τοπικό μέγιστο $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$ ευρίσκεται επάνω στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

* $x_2 = 1$, η θέση τού τοπικού ελαχίστου. Και $f(x_2) = f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta$. Το σημείο τού τοπικού ελαχίστου είναι: $B(1, -2, -2\eta\mu^2\theta)$, και εύκολα διαπιστώνουμε, ότι οι συντεταγμένες τού σημείου $B(1, -2 - 2\eta\mu^2\theta)$ επαληθεύουν την εξίσωση τής ευθείας $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. Άρα, το τοπικό ελάχιστο $B(1, -2 - 2\eta\mu^2\theta)$ ευρίσκεται επάνω στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

* $x_3 = 0$, η θέση τού σημείου καμπής. Και $f(x_3) = f(0) = -2\eta\mu^2\theta$. Το σημείο καμπής είναι: $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$, και εύκολα διαπιστώνουμε, ότι οι συντεταγμένες τού σημείου $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$ επαληθεύουν την εξίσωση τής ευθείας $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. Άρα, το σημείον καμπής $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$ ευρίσκεται επάνω στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

δ) $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ η δεδομένη συνάρτηση. Και $g(x) = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ η δεδομένη ευθεία.
Ορίζουμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.
Ευρίσκουμε το πρόσημο τής h:

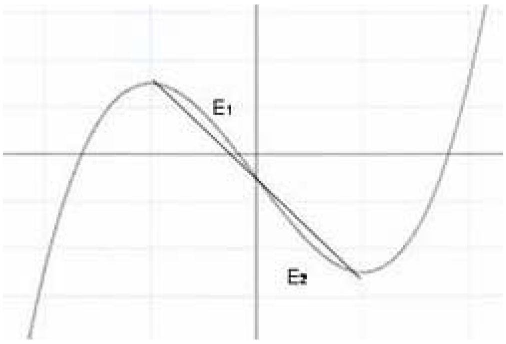
x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$x-1$		-		-		-	0	+	
X+1		-	0	+		+		+	
$h(x) = x(x-1)(x+1) = f(x) - g(x) = x^3 - x$		-	0	+	0	-	0	+	

Τα σημεία τομής τής ευθείας και τής γραφικής παράστασης τής f έχουν τετμημένες -1, 0, +1.

Επομένως, το εμβαδόν τού χωρίου είναι : E= $\int_{-1}^{0} |h(x)|dx + \int_{0}^{1} |h(x)|dx$. Τα ολοκληρώματα, λόγω τού ανωτέρω πίνακα προσήμων, γίνονται:

$$E=\int_{-1}^{0}|h(x)|dx+\int_{0}^{1}|h(x)|dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=$$

$$=\left(0-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-0\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ τετρ. μονάδες



ΘΕΜΑ 4º

α)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,1], άρα για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $0\le x\le 1$ και $f(0)\le f(x)\le f(1)$. Αλλά, $f(0)>0$. Άρα $f(x)\ge f(0)>0$, δηλαδή $f(x)>0$.

Έχουμε, λοιπόν, γιά κάθε $x\in[0,1]$ είναι $f(x)>0$ και $g(x)>0$. Επομένως $f(x).g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Έχουμε, λοιπόν:

ι) Για $x=0$, είναι $F(x)=F(0)=\int_0^0 f(t)g(t)dt=0$, δηλαδή $F(0)=0$.

ιι) **Για** $x>0$, **δηλαδή για** $x\in(0,1]$, θεωρούμε το διάστημα $[0,x]\subseteq[0,1]$. Τότε, συμφώνως προς τα ανωτέρω, είναι

* $f.g$ συνεχής στο $[0,x]\subseteq[0,1]$, ως γινόμενο συνεχών, και
* $f(t)g(t)>0$ για κάθε $t\in[0,x]\subseteq[0,1]$, ενώ
* $f.g$ δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,x]$ (αφού $f(t)g(t)>0$ για κάθε $t\in[0,x]\subseteq[0,1]$).

Άρα (γνωστό Θεώρημα): $\int_0^x f(t)g(t)dt>0$ για κάθε $x\in(0,1]$

Δηλαδή $F(x)>0$ γιά κάθε $x\in(0,1]$, ό.έ.δ.

Κατωτέρω δίδουμε και έναν άλλον τρόπο απάντησης στο ερώτημα 4α)(2)

β) Η αποδεικτέα σχέση $f(x).G(x)>F(x)$, για κάθε $x\in(0,1]$, γράφεται ισοδυνάμως: $f(x).G(x)>F(x)$ για κάθε $x\in(0,1]\Leftrightarrow f(x).G(x)-F(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]\Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)>0$ για κάθε $x\in(0,1]\Leftrightarrow \int_0^x f(x)g(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)>0$ για κάθε $x\in(0,1]\Leftrightarrow \int_0^x[f(x)g(t)-f(t)g(t)]dt>0$ για κάθε $x\in(0,1]$ (*)

Προκειμένου να αποδείξουμε την (*), θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση $f(x)g(t)-f(t)g(t)$ στο διάστημα $[0,x]$.

- **Για κάθε $x>0$, δηλαδή για κάθε $x\in(0,1]$, θεωρούμε το διάστημα $\Delta=[0,x]\subseteq[0,1]$.**
- **Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, άρα και στο $[0,x]\subseteq[0,1]$. Επομένως, για κάθε $t\in[0,x]\subseteq[0,1]$, δηλαδή για κάθε $0\le t\le x$ ισχύει: $f(0)\le f(t)\le f(x)$ και επειδή $g(t)>0$ για κάθε $t\in[0,1]$ (άρα και για κάθε $t\in[0,x]\subseteq[0,1]$), θα έχουμε: $f(t)g(t)\le f(x)g(t)$ για κάθε $t\in[0,x]\subseteq[0,1]$.**

- **Άρα έχουμε:** $f(x)g(t) \geq f(t)g(t)$ **για κάθε** $t \in [0,x] \subseteq [0,1] \Leftrightarrow f(x)g(t) - f(t)g(t) \geq 0$ **για κάθε** $t \in [0,x] \subseteq [0,1]$**.**
- **Τελικώς: η ως προς** t **συνάρτηση** $f(x)g(t) - f(t)g(t)$
    - **είναι συνεχής στο** $[0,1]$ **(άρα και στο** $[0,x]$**) και**
    - **είναι** $f(x)g(t) - f(t)g(t) \geq 0$ **για κάθε** $t \in [0,x]$**,**
    - **ενώ αυτή δεν είναι παντού μηδέν στο** $[0,x]$**.**

Τότε (γνωστό θεώρημα προσήμου τού ορισμένου ολοκληρώματος): $\int_0^x [f(x)g(t) - f(t)g(t)]dt > 0$,

με $t \in [0,x]$ **και** $x \in (0,1]$**. Δηλαδή, απεδείξαμε την (*). Άρα ισχύει και η αποδεικτέα, ισοδύναμή της:** $f(x).G(x) > F(x)$, για κάθε $x \in (0,1]$

γ) Η αποδεικτέα είναι: $\dfrac{F(x)}{G(x)} \leq \dfrac{F(1)}{G(1)}$ **για κάθε** $x \in (0,1]$**.**

Θεωρούμε την συνάρτηση: $h(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$**, με** $x \in (0,1]$**.**

[Σημειώνουμε, ότι η h **ορίζεται για κάθε** $x \in (0,1]$**, αφού :**
η g **συνεχής στο** $[0,x] \subseteq [0,1]$ **με** $g(t) > 0$ **από υπόθεση για κάθε** $t \in [0,1]$**, άρα και για κάθε** $t \in [0,x]$**. Άρα** $\int_0^x g(t)dt > 0$ **με** $x \in (0,1]$**. Δηλαδή** $G(x) = \int_0^x g(t)dt \neq 0$ **με** $x \in (0,1]$**, και επομένως ορίζεται η συνάρτηση** h**.]**

Θα ελέγξουμε την μονοτονία τής h **διά τής παραγώγου αυτής:**

Είναι $h'(x) = \left(\dfrac{F(x)}{G(x)}\right)' = \dfrac{F'(x)G(x) - G'(x)F(x)}{[G(x)]^2} = \dfrac{f(x)g(x)G(x) - F(x)g(x)}{[G(x)]^2} = \dfrac{g(x)[f(x)G(x) - F(x)]}{[G(x)]^2}$

(**)

Για το τελευταίο μέλος τής ισότητος (**):

- είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, άρα και για κάθε $x \in (0,1]$
- είναι $f(x).G(x) - F(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1]$, όπως προκύπτει από το ερώτημα β)
- **Άρα:** $h'(x) > 0$ **για κάθε** $x \in (0,1]$**.**

Επειδή η h **είναι συνεχής στο** $(0,1]$ **(από υπόθεση), και** $h'(x) > 0$ **για κάθε** $x \in (0,1]$**, η συνάρτηση** h **είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα** $(0,1]$**. Τούτο σημαίνει, ότι: για κάθε** $x \in (0,1]$, δηλαδή για κάθε $0 < x \leq 1$ ισχύει $h(x) \leq h(1) \Leftrightarrow \underline{\dfrac{F(x)}{G(x)} \leq \dfrac{F(1)}{G(1)}}$ **<u>για κάθε</u>** $\underline{x \in (0,1]}$ **<u>. ό.έ.δ.</u>**

δ) Πρέπει να βρούμε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right).x^2}$ **.**

ι) Βρίσκουμε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{F(x)}{G(x)}$ **(1). Είναι:** $F(x), G(x)$ **παραγωγίσιμες, άρα**

συνεχείς. Οπότε: $\lim_{x\to0^+} F(x) = F(0) = \int_0^0 f(t)g(t)dt = 0$**, και** $\lim_{x\to0^+} G(x) = G(0) = \int_0^0 g(t)dt = 0$**. Οπότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα de L' Hospital, έχουμε:**

(1)= $\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)\in\mathbb{R}$ **(1α)** **(αφού** $g(x)>0$ **για κάθε** $x\in[0,1]$ **και** f **συνεχής στο** $[0,1]$ **)**

ιι) Βρίσκουμε το όριο: $\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}$**.**

- **Η συνάρτηση** $H(x)=\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt$ **είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, επομένως:**

  $\lim_{x\to0^+} H(x) = H(0) = \int_0^0 \eta\mu t^2 dt = 0$**. Επισης: η συνάρτηση** $R(x)=x^5$ **έχει**

  $\lim_{x\to0^+} R(x) = \lim_{x\to0^+} x^5 = R(0) = 0$**.**

Άρα $\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5} = \lim_{x\to0^+}\frac{H(x)}{R(x)} = \lim_{x\to0_+}\frac{H'(x)}{R'(x)}$ **(2)**

Είναι, όμως:

$$H'(x) = \left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)' = \left(\int_0^{\phi(x)}\psi(t)dt\right)' = \psi(\phi(x)).\phi'(x) = \eta\mu[(x^2)^2].2x = 2x.\eta\mu x^4,$$

$$R'(x) = (x^5)' = 5x^4.$$

Συνεπώς, (2)= $\lim_{x\to0^+}\frac{2x.\eta\mu x^4}{5x^4} = \lim_{x\to0^+}\frac{2x}{5}.\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4} = 0.1 = 0$ **(2α).**

Τελικώς: από την ιδιότητα τού ορίου ενός γινομένου, έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right).x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}.\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5} \overset{(1\alpha),(2\alpha)}{=} f(0).0=0$$

, όπερ και το ζητούμενον!

---

(1). Άλλος τρόπος (με το Θεώρημα τού Bolzano) αντιμετωπίσεως τού ερωτήματος 3β)

ι) Η f είναι παντού συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[-2,-1]$. Ενώ, εύκολα διαπιστώνουμε:

$$f(-2) = -8+6-2\eta\mu^2\theta = -2-2\eta\mu^2\theta < 0$$

$f(-1) = -1+3-2\eta\mu^2\theta = 2-2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$, αφού $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$

Οπότε, $f(-2).f(-1)<0$. Άρα, κατά το Θεώρημα τού Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1\in(-2,-1)$, ώστε $f(\rho_1)=0$.

Δηλαδή, η $f(x)=0$ **έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα** $(-2,-1)$**.**

ιι) Η f είναι παντού συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[-1,+1]$.

$f(-1) = -1 + 3 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$, αφού $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$

$f(+1) = 1 - 3 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$.

Οπότε, $f(-1).f(+1) < 0$. Άρα, κατά το Θεώρημα τού Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (-1,+1)$, ώστε $f(\rho_2) = 0$.

Δηλαδή, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1,+1)$.

ιιι) Η f είναι παντού συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[+1,+2]$.

$f(+1) = 1 - 3 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$

$f(+2) = 8 - 6 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$. Οπότε, $f(+1).f(+2) < 0$. Άρα, κατά το Θεώρημα τού Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_3 \in (+1,+2)$, ώστε $f(\rho_3) = 0$. **Δηλαδή, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(+1,+2)$.**

Τελικώς, εδείξαμε, ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον τρείς ρίζες πραγματικές. Αλλά, η $f(x) = 0$ είναι εξίσωση τρίτου βαθμού, που, όπως γνωρίζουμε, έχει το πολύ τρείς πραγματικές ρίζες. Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρείς ρίζες.

(2). Άλλος τρόπος (Με την μονοτονία και την παράγωγο) αντιμετωπίσεως τού ερωτήματος 4α)

Το γινόμενο fg είναι συνεχής στο διάστημα Δ =[0,1], ως γινόμενο συνεχών. Και το 0 είναι σημείο τού διαστήματος Δ =[0,1]. Τότε (Θεώρημα ύπαρξης τής παράγουσας μίας συνεχούς συναρτήσεως σε ένα διάστημα Δ) η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$ παραγωγίζεται στο Δ = [0,1], και είναι $F'(x) = f(x).g(x)$ για κάθε $x \in \Delta = [0,1]$.

Επειδή f γνησίως αύξουσα στο [0,1], τότε για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $0 \leq x \leq 1$ και $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$. Αλλά, $f(0) > 0$.

Άρα $f(x) \geq f(0) > 0$, δηλαδή $f(x) > 0$, ενώ και $g(x) > 0$.

Άρα $f(x).g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, δηλαδή $F'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Οπότε η F είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το $\Delta = [0,1]$.

Επομένως, για κάθε $x \in (0,1]$, δηλαδή για $x > 0$, είναι $F(x) > F(0) = 0$ (διότι για $x = 0$, έχουμε $F(0) = \int_0^x f(t)g(t)dt = \int_0^0 f(t)g(t)dt = 0$).

Δηλαδή $F(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1]$. ό.έ.δ.

---------------- ... .

Επιμέλεια Λύσεων: **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**