ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1º

A. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 31. Κανόνες παραγωγίσεως)

Έστωσαν οι συναρτήσεις f και g, παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. θεωρούμε την συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$, η οποία ορίζεται και αυτή στο $\mathbb{R}$.

Για τυχόν $h\neq 0$ έχουμε $[f(x)+g(x)]' = F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$. Αλλά,

$$F(x+h)-F(x)=f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)=[f(x+h)-f(x)]+[(g(x+h)-g(x)],$$

Οπότε: $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ (1)

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, τότε υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$, και

Αφού η g είναι παραγωγίσιμη, τότε υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$.

Επομένως: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$.

Δηλαδή, $F'(x)=f'(x)+g'(x)$, επομένως: $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. ό.έ.δ.

B. α $\to$ Λάθος
β $\to$ Σωστό
γ $\to$ Σωστό
δ $\to$ Λάθος
ε $\to$ Λάθος

ΘΕΜΑ 2º

$f(x)=x^2+1$, με $x\in\mathbb{R}$

α) Η f είναι παραγωγίσιμη παντού, ως πολυωνυμική, και $f'(x)=(x^2+1)'=2x$.

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής τής f ως προς x, όταν x=2, είναι $f'(2)=2.(2)=4$.

β) Η f είναι συνεχής παντού, ως πολυωνυμική, και έχουμε κατά σειράν:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$ (1)

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$ (2)

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<0$ (3)

Τα ανωτέρω συμπεράσματα συνοψίζονται στον κατωτέρω πίνακα:

x	$-\infty$	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $\qquad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Τοπ. Ελάχ.

Επομένως: Για x=0 η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (το οποίον είναι ολικό). Αυτό το ολικό ελάχιστο είναι $f(0)=0^2+1=1$, όπερ και το ζητούμενον.

γ) Η ευθεία $y=3$ γράφεται $y=0.x+3$, επομένως έχει συντελεστή διευθύνσεως λ=0.

Η εφαπτομένη τής γραφικής παραστάσεως τής f, που είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=3$, θα έχει και αυτή τον ίδιον συντελεστή διευθύνσεως λ=0. Δηλαδή πρέπει να είναι $f^{'}(x_0)=0$, όπου x_0 η τετμημένη τού σημείου επαφής εφαπτομένης και καμπύλης.

Αλλά, $f^{'}(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0$. Επομένως, το σημείο επαφής είναι: $A(x_0, f(x_0))$, δηλαδή $A(0, f(0))$, ή $A(0,1)$. Αυτό είναι και το ζητούμενον.

ΘΕΜΑ 3º

Μάς δίδεται ο ελλιπής πίνακας:

Τιμή προϊόντος σε Ευρώ [-)	**Σχετική Συχνότητα** f_i
8 – 10	0,2
10 – 12	f_2
12 – 14	0,3
14 – 16	f_4

Η κατανομή, που έχουμε εδώ, είναι ομαδοποιημένη, και γι' αυτό θα βρούμε και τις κεντρικές τιμές x_i των κλάσεων, συμπληρώνοντας και την στήλη με τα γινόμενα $x_i f_i$, τα οποία απαιτούνται για την μέση τιμή $\overline{x}$:

[-)	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετ. συχνότητα f_i	$x_i f_i$
8 – 10	9	0,2	1,8
10 – 12	11	f_2	11. f_2
12 – 14	13	0,3	3,9
14 – 16	15	f_4	15. f_4
Σύνολο		**1**	**11.** f_2 **+15.** f_4 **+5,7**

α) Γνωρίζουμε, ότι: $\overline{x}=\sum_{i=1}^{4} x_i f_i \Leftrightarrow 11,6=11.f_2+15.f_4+5,7 \Leftrightarrow 11.f_2+15.f_4=5,9$ **(α).**

Εξ άλλου, από την στήλη τής σχετικής συχνότητος προκύπτει: $0,2+f_2+0,3+f_4=1 \Leftrightarrow f_2+f_4=0,5$ **(β).**

Το σύστημα τών (α) και (β), επιλυόμενον, δίδει:

$$\begin{cases} 11f_2+15f_4=5,9 \\ f_2+f_4=0,5 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ -11 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 11f_2+15f_4=5,9 \\ -11f_2-11f_4=-5,5 \end{cases} \Big|$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, λαμβάνουμε: $4f_4=0,4 \Leftrightarrow \underline{f_4=0,1}$, και από (β)

προκύπτει: $f_2+f_4=0,5 \Leftrightarrow f_2+0,1=0,5 \Leftrightarrow \underline{f_2=0,4}$

β) Κατασκευάζουμε πάλιν τον πίνακα (με $\underline{f_4=0,1}$, και $\underline{f_2=0,4}$), συμπληρώνοντας και την στήλη με τις αθροιστικές συχνότητες F_i.

[-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετ. συχνότητα f_i	$x_i f_i$	F_i
8 – 10	9	10	0,2	1,8	0,2
10 – 12	11	20	0,4	4,4	0,6
12 – 14	13	15	0,3	3,9	0,9
14 – 16	15	5	0,1	1,5	1
Σύνολο		**50**	**1**	**11,6**	

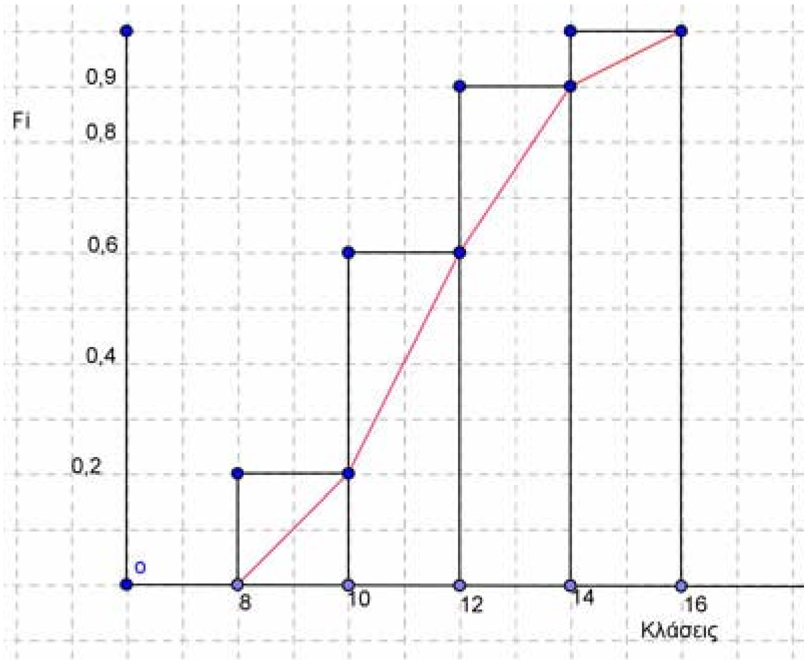
Από $\nu_i=\nu.f_i$, όπου $\nu=50$, προκύπτουν επίσης :

$\nu_1 = 50.f_1$=10, $\nu_2 = 50.f_2$=20, $\nu_3 = 50.f_3$=15, $\nu_4 = 50.f_4$=5.

Οπότε:

ι) Η τιμή τού προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 Ευρώ σε $\nu_2 + \nu_3 + \nu_4$=40 καταστήματα.

ιι) Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι το κάτωθι (κόκκινη τεθλασμένη):



ΘΕΜΑ 4º

α) Είναι, συμφώνως προς την εκφώνηση τού προβλήματος,

$y_i = x_i + 10\%.x_i = x_i + 0{,}1.x_i = 1{,}1.x_i$

ι) Επειδή $y_i = 1{,}1x_i \Rightarrow$ (από γνωστή εφαρμογή) : $\overline{y} = 1{,}1.\overline{x}$ και $S_y = |1{,}1|.S_x = 1{,}1S_x$.

Αλλά, $S_x = \sqrt{4} = 2$.

Τώρα: $CV_y = \dfrac{S_y}{\overline{y}} = \dfrac{1{,}1.S_x}{1{,}1.\overline{x}} = \dfrac{S_x}{\overline{x}} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$. Επομένως το δείγμα $y_1, y_2, ..., y_\nu$ δεν είναι ομοιγενές, αφού $CV_y = 25\% \geq 10\%$

ιι) $CV_y = \dfrac{S_y}{\overline{y}} = \dfrac{1{,}1.S_x}{1{,}1.\overline{x}} = \dfrac{S_x}{\overline{x}} = CV_x$, επομένως τα δείγματα έχουν την ίδια ομοιογένεια.

β) Από γνωστή εφαρμογή, γνωρίζουμε, ότι:

Άν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ένα δείγμα παρατηρήσεων, και $y_1, y_2, ..., y_\nu$ ένα άλλο ισοπληθές δείγμα παρατηρήσεων, ώστε: $y_i = c.x_i + b$, για κάθε i=1,2,3,...,ν (και για $c, b \in \mathbb{R}$), τότε: $\overline{y} = c.\overline{x} + b$ (1), και $S_y = |c|.S_x$ (2)

ι) Τώρα, από $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S_x} \Rightarrow z_i = (\dfrac{1}{S_x}).x_i - (\dfrac{\overline{x}}{S_x})$, δηλαδή $z_i = (\dfrac{1}{S_x}).x_i - (\dfrac{\overline{x}}{S_x})$, οπότε από την (1) λαμβάνουμε: $\overline{z} = (\dfrac{1}{S_x}).\overline{x} - (\dfrac{\overline{x}}{S_x}) = \dfrac{\overline{x}}{S_x} - \dfrac{\overline{x}}{S_x} = 0$, ενώ λόγω τής (2): $S_z = \left|\dfrac{1}{S_x}\right| S_x = \dfrac{S_x}{S_x} = 1$

ιι) Είναι $CV_z = \dfrac{S_z}{|\overline{z}|}$. Αλλά $\overline{z} = 0$, οπότε δεν ορίζεται ο συντελεστής CV_z των $z_1, z_2, ..., z_\nu$.-

---------------- ... .

Επιμέλεια Λύσεων: **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**