ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 152. Πιθανότητες)

Είναι γνωστό , ότι $(A-B)$ και $A\cap B$ είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους, και μάλιστα: $(A-B)\cup(A\cap B)=A$.
Επομένως, $P[(A-B)\cup(A\cap B)]=P(A-B)+P(A\cap B)$, δηλαδή $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$. Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$. ό.έ.δ.

Β. α) Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 22. Ορισμός Παραγώγου συναρτήσεως)

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f και $x_0\in D_f$. Θεωρούμε ακόμη τυχόν $h\neq 0$, ώστε $x_0+h\in D_f$.

Θα λέμε, ότι η f **είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τού πεδίου ορισμού της,** εάν και μόνον εάν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,

β) Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87. Ορισμός διαμέσου ενός δείγματος)

Εάν έχουμε ν το πλήθος παρατηρήσεις ενός δείγματος και τις διατάξουμε κατά αύξουσα σειράν, ορίζουμε ως διάμεσο (δ) τού δείγματος αυτού
- την μεσαία στην σειρά παρατήρηση, εάν το ν είναι περιττός αριθμός
- το ημιάθροισμα τών δύο «μεσαίων» παρατηρήσεων, εάν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Γ. 1) α $\to$ Σωστό
β $\to$ Σωστό
γ $\to$ Λάθος

Γ. 2) $f_1'(x)=(x^\nu)'=\nu.x^{\nu-1}$, $f_2'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

$f_3'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_4'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

ΘΕΜΑ 2ο

$f(x)=xe^x+3$, με $x\in\mathbb{R}$

α) $f'(x)=(xe^x+3)'=(xe^x)'+(3)'=x'.e^x+(e^x)'.x+0=1.e^x+e^x.x=e^x+x.e^x$. (*)

Επειδή $f(x)=xe^x+3$, τότε $\underline{x.e^x=f(x)-3}$ και η ισότητα $f'(x)=e^x+x.e^x$ δίδει

$f'(x)=e^x+x.e^x=e^x+(f(x)-3)=\underline{f(x)+e^x-3}$. ό.έ.δ.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-e^x}{x^2-x}=;$

Υπολογίζουμε το κλάσμα: $\dfrac{f'(x)-e^x}{x^2-x}\overset{(*)}{=}\dfrac{(e^x+xe^x)-e^x}{x^2-x}=\dfrac{xe^x}{x^2-x}=\dfrac{xe^x}{x(x-1)}=\dfrac{e^x}{x-1}$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-e^x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x-1}=\dfrac{e^0}{0-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$**, όπερ το ζητούμενον.**

ΘΕΜΑ 3ο

α) Ονομάζουμε λ κάθε ένα από τα μέλη τής δεδομένης ισότητας:
P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2P(3)=2P(4)=2P(5)=λ (*)
Από (*) έχουμε P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=λ (1),

και 2P(3)=2P(4)=2P(5)=λ$\Rightarrow$P(3)=P(4)=P(5)=$\frac{\lambda}{2}$ (2)

Τώρα, γνωρίζουμε, ότι: P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1 $\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$

$\lambda+\lambda+\lambda+\lambda+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}=1 \Leftrightarrow 4\lambda+\frac{3\lambda}{2}=1 \Leftrightarrow 11\lambda=2 \Leftrightarrow \underline{\lambda=\frac{2}{11}}$

Επομένως, P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=$\frac{2}{11}$, και P(3)=P(4)=P(5)=$\frac{1}{11}$, όπερ και το ζητούμενον.

β) $A=\{1,3,x^2-x-3\}$, $B=\{2,x+1,2x^2+x-2,-2x+1\}$

Θέλουμε να ισχύει: $A\cap B=\{-1,3\}$. Παρατηρούμε, ότι η τομή $A\cap B$ και το σύνολο $A=\{1,3,x^2-x-3\}$ έχουν κοινό στοιχείο το 3. Επομένως, **το μόνο στοιχείο** τού συνόλου $A=\{1,3,x^2-x-3\}$, που μπορεί να ισούται με το δεύτερο στοιχείο τής τομής, δηλαδή με το -1, είναι το στοιχείο x^2-x-3.

Επομένως x^2-x-3=-1$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$.

- Για $x=2$, έχουμε: $A=\{1,3,-1\}$, και $B=\{2,3,8,-3\}$, οπότε: $A\cap B=\{3\}\neq\{-1,3\}$.

Συνεπώς η τιμή $x=2$ απορρίπτεται.

- Για $x=-1$, $A=\{1,3,-1\}$, και $B=\{2,0,-1,3\}$. Άρα $A\cap B=\{-1,3\}$

Συνεπώς, η μοναδική τιμή τού χ, για την οποίαν $A\cap B=\{-1,3\}$, είναι $x=-1$. ό.έ.δ.

γ) Για $x=-1$, έχουμε

$A=\{1,3,-1\}$, οπότε **P(A)**=P(1)+P(3)+P(-1) $\overset{(a)}{=}$ $\frac{2}{11}+\frac{1}{11}+\frac{2}{11}=\frac{5}{11}$,

$B=\{2,0,-1,3\}$, οπότε: **P(B)**=P(2)+P(0)+P(-1)+P(3)=$\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}=\frac{7}{11}$, και

$A\cap B=\{-1,3\}$, οπότε: $P(A\cap B)=$ P(-1)+P(3)=$\frac{2}{11}+\frac{1}{11}=\frac{3}{11}$.

Τώρα, επειδή $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$, θα έχουμε: $P(A-B)=\frac{5}{11}-\frac{3}{11}=\frac{2}{11}$, ενώ:

$P(A\cup B')=$(προσθετικός νόμος) $P(A)+P(B')-P(A\cap B')$ (3)

Έχουμε: $P(B')=1-P(B)=P(B')=1-P(B)=1$-$\frac{7}{11}=\frac{4}{11}$, και επειδή $A\cap B'=A-B$, θα είναι:

$P(A\cup B')\overset{(3)}{=}P(A)+P(B')-P(A\cap B')=P(A)+\frac{4}{11}-\frac{2}{11}=\frac{5}{11}+\frac{4}{11}-\frac{2}{11}=\frac{7}{11}$. ¨οπερ και το ζητούμενον.

ΘΕΜΑ 4º

α) $\overline{X}_A=\frac{12+18+(t_3+t_4+t_5+...++t_{25})}{25}\overset{(\upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)}{=}\frac{12+18+345}{25}=\frac{375}{25}=15$

$\overline{X}_B=\frac{16+14+(t_3+t_4+t_5+...++t_{25})}{25}\overset{(\upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)}{=}\frac{16+14+345}{25}=\frac{375}{25}=15$

Άρα, $\overline{X}_A=\overline{X}_B$ =15

β) Από τον γνωστόν τύπο τής διακυμάνσεως:

$S^2 = \dfrac{(t_1-\overline{x})^2+(t_2-\overline{x})^2+(t_3-\overline{x})^2+\ldots+(t_\nu-\overline{x})^2}{\nu}$, λαμβάνουμε:

$S_A{}^2 = \dfrac{(12-15)^2+(18-15)^2+(t_3-15)^2+\ldots+(t_{25}-15)^2}{25}$, και

$S_B{}^2 = \dfrac{(16-15)^2+(14-15)^2+(t_3-15)^2+\ldots+(t_{25}-15)^2}{25}$. Οπότε:

$S_A{}^2 - S_B{}^2 =$

$\dfrac{(12-15)^2+(18-15)^2+(t_3-15)^2+\ldots+(t_{25}-15)^2}{25}$ -

$\dfrac{(16-15)^2+(14-15)^2+(t_3-15)^2+\ldots+(t_{25}-15)^2}{25} =$

$= \dfrac{3^2+3^2}{25} - \dfrac{1^2+1^2}{25} = \dfrac{16}{25}$. ό.έ.δ.

γ) $CV_A = \dfrac{1}{15} \Leftrightarrow \dfrac{S_A}{\overline{X}_A} = \dfrac{1}{15}$**, και, επειδή** $\overline{X}_A = 15$, έχουμε: $\dfrac{S_A}{15} = \dfrac{1}{15} \Leftrightarrow S_A = 1$**. Τότε, από**

$S_A{}^2 - S_B{}^2 = \dfrac{16}{25} \Rightarrow 1 - S_B{}^2 = \dfrac{16}{25} \Leftrightarrow S_B{}^2 = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow S_B = \dfrac{3}{5}$ (αφού $S_B \geq 0$).

Κατά συνέπειαν: $CV_B = \dfrac{S_B}{\overline{X}_B} = \dfrac{\frac{3}{5}}{15} = \dfrac{3}{75} = \dfrac{1}{25}$, όπερ και το ζητούμενον.

---------------- ... .

Επιμέλεια Λύσεων: **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**