ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1º

Α. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 30. Κανόνες Παραγώγισης)

Θεωρούμε την συνάρτηση F(x)=c.f(x), για την οποίαν ισχύει:
F(x+h)-F(x)=c.f(x+h)-c.f(x)=c.(f(x+h)-f(x)), όπου x στο πεδίο ορισμού τής f και h$\in\mathbb{R}$.
Για h$\neq$0, έχουμε:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c.(f(x+h)-f(x))}{h}=c.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Γνωρίζουμε: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)$ (1), και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ (2)

Επομένως,

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=c.\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c.f'(x).$$

Συνεπώς, $F'(x)=(c.f(x))'$, και $F'(x)=c.f'(x)$. Άρα: $\underline{(c.f(x))'=c.f'(x)}$

Β. α) Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 142. Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα)

Δύο Ενδεχόμενα Α και Β λέγονται Ασυμβίβαστα, όταν $A\cap B=\varnothing$

β) Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 16.)

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, λέγεται συνεχής, εάν για κάθε $x_0\in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Γ. α $\rightarrow$ Σωστό
β $\rightarrow$ Σωστό
γ $\rightarrow$ Λάθος
δ $\rightarrow$ Λάθος

ΘΕΜΑ 2º

α) Από τον δεδομένον πίνακα προκύπτει, ότι v_1= α+4, v_2= 5.α+8, v_3= 4.α, v_4= α-1, v_5= 2.α, ενώ είναι $v_1+v_2+v_3+v_4+v_5$=50, δηλαδή: (α+4)+(5.α+8)+ 4.α + (α-1)+ 2.α= 50$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ 13.α+11=50$\Leftrightarrow$13.α=39$\Leftrightarrow$ **<u>α=3</u>**

Λαμβάνοντας υπ' όψη την ανωτέρω τιμή τού α, και για να απαντήσουμε στα επόμενα ερωτήματα, ανακατασκευάζουμε τον πίνακα δεδομένων, δημιουργώντας μία στήλη για το γινόμενο $x_i.v_i$ (για την εύρεση τής μέσης τιμής), και μία στήλη για την αθροιστική συχνότητα N_i (για την εύρεση τής διαμέσου):

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

x_i	v_i	$x_i.v_i$	N_i
0	7	0	7
1	23	23	30
2	12	24	42
3	2	6	44
4	6	24	50
Σύνολο	**50**	**77**	

β) Για τον υπολογισμό τής μέσης τιμής $\bar{x}$, παίρνουμε τον τύπο $\bar{x}=\frac{\Sigma x_i.\nu_i}{\nu}=\frac{77}{50}$ =1,54

γ) Επειδή έχουμε 50 παρατηρήσεις, η διάμεσος δ ισούται με το ημιάθροισμα τής 25ης και τής 26ης παρατήρησης (εφ' όσον βεβαίως έχουμε γράψει τις παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά, όπως έχει ήδη γίνει στον παραπάνω πίνακα):

δ= $\frac{25\eta\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta+26\eta\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta}{2}$ (από την στήλη N_i)= $\frac{1+1}{2}$ =1

δ) Με την προϋπόθεση, ότι ο μαθητής επιλέγεται τυχαία, ορίζουμε Α το ενδεχόμενο ο επιλεγόμενος μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

Τότε, από τον κλασσικό ορισμό τής πιθανότητος, έχουμε: P(A)= $\frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{\nu_4+\nu_5}{\nu}=\frac{2+6}{50}=$ 0,16=16%

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος τού πειράματος τύχης , ο οποίος αποτελείται από τα αγόρια και από τα κορίτσια τού χορευτικού ομίλου.
Έστω ακόμη Α το ενδεχόμενο να επιλεγή αγόρι, και Κ το ενδεχόμενο να επιλεγή κορίτσι.
Συμφώνως προς την εκφώνηση τού προβλήματος, είναι: N(A)=x, N(K)= $(x+4)^2$, και N(Ω)=$x+(x+4)^2$.
Προφανώς, πρέπει να είναι x>0.

α) Η πιθανότητα να επιλεγή αγόρι είναι (κλασσικός ορισμός πιθανότητος): P(A)= $\frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{x}{x+(x+4)^2}=$

$=\frac{x}{x^2+9x+16}$, με χ>0. Πρέπει, βεβαίως, να είναι $0\leq$P(A) ≤ 1, δηλαδή $0\leq \frac{x}{x+(x+4)^2}\leq 1$, σχέση η οποία ισχύει, αφού x>0.

β) Δεδομένο: P(A)= $\frac{1}{19}$. Οπότε: $\frac{x}{x^2+9x+16}=\frac{1}{19}$, δηλαδή x^2-10x+16=0, και εξ αυτής παίρνουμε: x=2 ή x=8. **Η τιμή χ=8 απορρίπτεται,** αφού τότε ο χορευτικός όμιλος θα είχε $8+(8+4)^2$=152 άτομα, που δεν ισχύει, αφού γνωρίζουμε, ότι ο χορευτικός όμιλος περιλαμβάνει λιγώτερα από 100 μέλη.
Η τιμή χ=2 είναι δεκτή, αφού δίνει $2+(2+4)^2$=38 μέλη τού χορευτικού ομίλου <100. **Άρα, ο όμιλος έχει 38 μέλη.**

Η πιθανότητα να επιλεγή κορίτσι είναι: P(K)= $\frac{\mathrm{N(K)}}{\mathrm{N}(\Omega)}$ **=** $\frac{(x+4)^2}{x+(x+4)^2}$ **=...=** $\frac{36}{38}=\frac{18}{19}$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση P(x)= $\frac{x}{x^2+9x+16}$, όπου χ ο αριθμός τών αγοριών τού ομίλου, με χ>0. Η συνάρτηση αυτή εκφράζει την πιθανότητα να επιλεγή αγόρι κατά την εκτέλεση τού πειράματος τύχης, συναρτήσει τού χ.
θα αναζητήσουμε το μέγιστο τής P(x).

Είναι P'(x)= $\left(\frac{x}{x^2+9x+16}\right)'$ =...= $\frac{-x^2+16}{\left(x^2+9x+16\right)^2}$

Ισχύει: P'(x)=0 $\Leftrightarrow -x^2+16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow$ **x=4 ή x=-4**
Η τιμή χ=-4 απορρίπτεται, αφού πρέπει χ>0.
Ακόμη: P'(x)>0 $\Leftrightarrow -x^2+16>0$ (αφού και $(x^2+9x+16)^2>0$), οπότε: $-x^2+16>0 \Leftrightarrow x^2-16<0 \Leftrightarrow$ 0<χ<4, ενώ P'(x)<0 , όταν χ>4, όπως φαίνεται και στον κατωτέρω πίνακα:

χ	0		4		$+\infty$
P'(x)		+	0	-	
P(x)		↗	$\frac{1}{17}$	↘	

Μέγιστο=P(4)=$\dfrac{4}{4^2+9.4+16}=\dfrac{1}{17}$

Επομένως, η πιθανότητα να επιλεγή αγόρι μεγιστοποιείται, όταν τα αγόρια είναι ακριβώς τέσσαρα. Και τότε η πιθανότητα αυτή είναι ίση με $\dfrac{1}{17}$

ΘΕΜΑ 4^{ο}

α) Η παράγωγος τής f είναι: $f'(x)=(-2x^2+kx+4\sqrt{x}+10)'=-4x+k+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, με χ>0   (1)

Επειδή η εφαπτομένη στην γραφική παράσταση τής f και στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ, τότε θα ισχύει: $f'(1)=0$, οπότε θα είναι $f'(1)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-4+k+2=0\Leftrightarrow k=2$

Άρα, $\underline{f(1)=-2+2+4+10=14}$

Εξ άλλου, η εξίσωση τής εφαπτομένης τής γραφικής παράστασης τής f στο σημείο Α(1, $f(1)$) είναι τής μορφής : $y=\lambda.x+\beta$, όπου $\lambda=f'(1)=0$

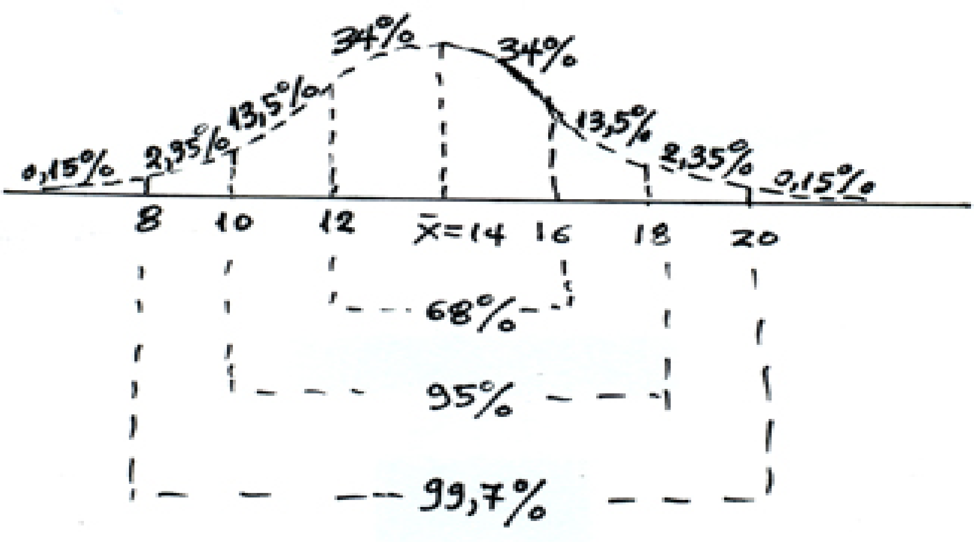
Αφού το σημείο Α(1, $f(1)$), δηλαδή το Α(1,14), είναι σημείο επαφής, τότε θα επαληθεύει και την $y=\lambda.x+\beta$, οπότε: 14=$\lambda.1+\beta$ και εξ αυτού 14=0.1+β$\Rightarrow$β=14.

Έτσι, η εξίσωση τής ζητουμένης εφαπτομένης είναι : $y=0.x+14\Leftrightarrow y=14$

β) Τα στοιχεί τής κανονικής κατανομής είναι: $\overline{X}=f(1)$ και $s=-\dfrac{2.f'(4)}{13}$.

Αλλά, $f(1)=14$, και $f'(4)\overset{(1)}{=}-4.4+k+\dfrac{2}{\sqrt{4}}$=-15+$k$=-15+2=-13. Οπότε: $\underline{\overline{X}=14, S=-\dfrac{2.(-13)}{13}=2}$

<u>Τώρα, η καμπύλη τής κανονικής κατανομής είναι:</u>



ι) Αφού μικρότερες ή ίσες τού 8 είναι τρείς παρατηρήσεις τού αντιπροσωπευτικού δείγματος, αυτό σημαίνει, ότι το 0,15% τών παρατηρήσεων είναι τρείς παρατηρήσεις. Εάν ν είναι το μέγεθος τού δείγματος, τότε πρέπει να είναι: 0,15%.ν=3$\Leftrightarrow$ $\dfrac{0,15}{100}.\nu=3$ $\dfrac{0,15}{100}.\nu=3\Leftrightarrow 0,15.\nu=300\Leftrightarrow 15.\nu=30000\Leftrightarrow \nu=2.000$.

Στο διάστημα (10,16) ευρίσκονται το 68%+13,5%=81,5% τών παρατηρήσεων, δηλαδή $\dfrac{81,5.2000}{100}=1630$ παρατηρήσεις.

ιι) Υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβολής CV : CV= $\dfrac{S}{\overline{X}}=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}>\dfrac{1}{10}=10\%$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιγενές.

Εάν τώρα σε κάθε μία από τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_\nu$ προστεθή η τιμή α>0, τότε θα έχουμε τις νέες παρατηρήσεις: $y_1 = x_1 + a, y_2 = x_2 + a, ..., y_\nu = x_\nu + \alpha$.

Τότε, η μέση τιμή τών νέων παρατηρήσεων θα είναι: $\overline{Y} = \overline{X} + \alpha$ =14+ α , ενώ $S_y = S_x = 2$

Οπότε, ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι: $CV' = \frac{S_y}{\overline{Y}} = \frac{S_x}{\overline{X} + \alpha} = \frac{2}{14 + \alpha}$.

Για να είναι, τώρα, το δείγμα ομοιογενές, πρέπει: $CV' < 10\%$ ή $\frac{2}{14 + a} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 14 + a \geq 20 \Leftrightarrow a \geq 6$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή τού α, προκειμένου το νέο δείγμα να είναι ομοιογενές, είναι α=6.

---------------- ... .

<u>Επιμέλεια Λύσεων:</u> **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**