ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1º

Α. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 98. Μέτρο μιγαδικού αριθμού)

Για τους μιγαδικούς αριθμούς Z_1, Z_2 έχουμε: $|Z_1\cdot Z_2|=|Z_1|\cdot|Z_2| \Leftrightarrow |Z_1\cdot Z_2|^2=|Z_1|^2\cdot|Z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1.z_2).(\overline{z_1.z_2}) = z_1.\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1.z_2.\overline{z_1}.\overline{z_2} = z_1.\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2}$. Η τελευταία ισότητα είναι αληθής. Άρα, αληθής είναι και η ισοδύναμή της, αρχική.

Β. 1) → Λάθος, 2) → Σωστό, 3) → Σωστό, **4)** → Λάθος, **5)** → Λάθος, 6) →Σωστό

ΘΕΜΑ 2º

α) Υπολογίζουμε την Διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2 - 4.\alpha.\gamma=-36<0$. Επομένως, οι ρίζες είναι: $X_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{-\Delta}}{2.\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X_1=2+3.\boldsymbol{i}$, ή $X_2=2-3.\boldsymbol{i}$

β) Υπολογίζουμε την τιμή εκάστης παραστάσεως: $|z_1|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, $|\overline{z_2}|=|z_2|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$,

$|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|=\sqrt{13}.\sqrt{13}=13$, $\boldsymbol{i}^{2006}=\boldsymbol{i}^{4.501+2}=\boldsymbol{i}^2=-1$.

Άρα, $A=|z_1|^2-2.|z_1.z_2|+\sqrt{13}.|\overline{z_2}|+\iota^{2006}=(\sqrt{13})^2-2.13+\sqrt{13}.\sqrt{13}+(-1)=-1$.

γ) $|z-z_1|=5 \Leftrightarrow |z-(2+3.\iota)|=5$ (2). Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(2,3) και ακτίνα ρ=5.

(Αυτό επιβεβαιώνεται και ως εξής: Αν $z=\chi+\psi.i$, με $\chi,\psi\in\mathbb{R}$, τότε:

(2) $\Leftrightarrow |(\chi-2)+(\psi-3)i|=5 \Leftrightarrow \sqrt{(\chi-2)^2+(\psi-3)^2}=5 \Leftrightarrow (\chi-2)^2+(\psi-3)^2=5^2$, η οποία είναι η εξίσωση τού κύκλου με κέντρο Κ(2,3) και ακτίνα ρ=5.)

ΘΕΜΑ 3º

Ι) Η συνάρτηση f, με $\lambda\in\mathbb{R}$, έχει Πεδίο Ορισμού $D_f=\mathbb{R}$.

Γνωρίζουμε, ότι η f θα είναι συνεχής στο $X_o=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$ (*). Με δεδομένη την σχέση (*), θα βρούμε την τιμή τού $\lambda\in\mathbb{R}$:

Έχουμε, λοιπόν:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(-\frac{3}{4}.x+\lambda)=\lambda-\frac{3}{4} \qquad (1)$$

$$\lim_{\chi\to1^+}(\frac{\chi^2-8\chi+4}{4\chi})=-\frac{3}{4} \qquad (2)$$

$$f(1)=\lambda-\frac{3}{4} \qquad (3).$$

Με τις τιμές (1), (2), (3), η σχέση (*) δίδει: $\lambda-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{3}{4} \Rightarrow \underline{\lambda=0}$

Δηλαδή: **Η συνάρτηση f είναι συνεχής όταν και μόνον είναι λ=0.**

ΙΙ) Για λ=0, η συνάρτηση f γίνεται : $f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x, x\le1 \\ \frac{x^2-8x+4}{4x}, x>1 \end{cases}$ και $f(1)=-\dfrac{3}{4}$.

α) - Για χ<1, η $f(x) = -\frac{3}{4}x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

- Για χ>1, η $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως ρητή.

- Θα ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα τής f στην θέση $x_0 = 1$.

Έχουμε, λοιπόν (με την παραγώγιση κατά τον ορισμό τής παραγώγου):

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{3}{4}(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(-\frac{3}{4}) = -\frac{3}{4}, \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2 - 8x + 4}{4x} + \frac{3}{4}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{4x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{4x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-4}{4x} = -\frac{3}{4}.$$

Επειδή, λοιπόν, είναι $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\frac{3}{4}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Τελικώς :

- η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 1)$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, +\infty)$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, $D_f = \mathbb{R}$.

β) Η πλάγια ασύμπτωτη τής f έχει την εξίσωση $\psi = \lambda\chi + \beta$, όπου

$$\lambda = \lim_{\chi\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2 - 8x + 4}{4x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 8x + 4}{4x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}, \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{\chi\to +\infty}(f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to +\infty}(\frac{x^2 - 8x + 4}{4x} - \frac{1}{4}x) = \lim_{x\to +\infty}(\frac{-8x + 4}{4x}) = \lim_{x\to +\infty}(\frac{-8x}{4x}) = -2 \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η ευθεία (ε) με εξίσωση: $\psi = \frac{1}{4}\chi - 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτος τής C_f στο + ∞

ΘΕΜΑ 4º

I) Το πεδίο ορισμού τής συναρτήσεως f είναι **$D_f = \mathbb{R}$.**

Είναι $f(1) = 12 - k$.

Η f **,** ως πολυωνυμική, είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 6x^2 - 2kx$ (*).

Η εφαπτομένη τής C_f στο σημείο Α(1, 12-κ) είναι παράλληλη προς τον άξονα χ΄χ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

II) Για κ=3, η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10$

α) Μονοτονία και Ακρότατα

Η f είναι συνεχής, ως πολυωνυμική. Είναι $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. Έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = 1$. Επίσης, έχουμε: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ χ<0 ή χ>1, ενώ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ 0<χ<1.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.μ		τ.ε		

Από τον ανωτέρω πίνακα διαπιστώνουμε, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα ($-\infty$, 0], (1, $+\infty$), και γνησίως φθίνουσα στο [0,1]. Άρα, έχουμε:

- τοπικό μέγιστο στην θέση χ=0 (το $f(0)=10$), και
- τοπικό ελάχιστο στην θέση χ=1 (το $f(1)=9$

β) Το σύνολο τιμών στο διάστημα Δ_1=(- ∞ , 0] ευρίσκεται ως εξής:

Η f είναι συνεχής σ' αυτό (πολυωνυμική) και γνησίως αύξουσα (όπως είδαμε προηγουμένως). Τότε

$f(\Delta_1)=(\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(x), f(0))=(-\infty,10]$, αφού: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$, και $f(0)=10$.

γ) Για κάθε α $\in$ (14,15) είναι 14<α<15 (α)

Η εξίσωση $f(x)=a-5$ γράφεται: $f(x)-a+5=0$ (β)

Θεωρούμε την συνάρτηση: $g(x)=f(x)-a+5$.

Η g είναι συνεχής στο διάστημα [0,1], ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και είναι:

$g(0)=f(0)-a+5=10-a+5=15-a>0,$ λόγω τής (α)

ενώ $g(1)=f(1)-a+5=9-a+5=14-a<0,$ λόγω τής (α)

Επομένως: $g(0).g(1)<0$.

Συνεπώς: κατά το Θεώρημα τού Bolzano στο διάστημα [0,1], η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1).

Όμως, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1], αφού και η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό. Επομένως, η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική. Άρα, η εξήσωση $g(x)=0$, δηλαδή $f(x)-a+5=0$, **επομένως η $f(x)=a-5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (0,1). Όπερ έδει δείξαι!**

----------------- ... .

Επιμέλεια Λύσεων: **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**