ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ***

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 253. Μονοτονία συναρτήσεως)
Αποδεικνύουμε το Θεώρημα για την περίπτωση $f'(x) > 0$ (η περίπτωση $f'(x) < 0$ αποδεικνύεται αναλόγως):
Έστωσαν **τυχόντα** $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε, ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
Πράγματι: Πρώτα-πρώτα, το κλειστό διάστημα $[x_1, x_2]$ είναι υποσύνολο τού Δ, αφού $x_1, x_2 \in \Delta$.
Τώρα, η συνάρτηση f, ως παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο τού Δ, θα είναι παραγωγίσιμη και στο διάστημα $(x_1, x_2) \subseteq \Delta$. Εξ άλλου, ως συνεχής στο Δ, θα είναι συνεχής και στο $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$.
Από τα ανωτέρω προκύπτει, ότι η f πληροί τις προϋποθέσεις τού Θ.Μ.Τ. τού Διαφορικού Λογισμού, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα αυτό, θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Από την τελευταία σχέση παίρνουμε: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi).(x_2 - x_1)$ (1)
Όμως, ισχύει $f'(\xi) > 0$ εξ υποθέσεως, και $x_2 > x_1$ επειδή έτσι τα θεωρήσαμε εξ αρχής. Τότε, από την σχέση (1) παίρνουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$ και εξ αυτού $f(x_2) > f(x_1)$.
Δηλαδή: $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, αποδείξαμε, ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Α.2 Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 273. Κυρτότητα συναρτήσεως)
Μία συνάρτηση f, συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό τού Δ, θα λέμε, ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (ή είναι κυρτή) στο Δ, εάν η παράγωγος αυτής f' είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό τού διαστήματος Δ.

Β. α) → Λάθος, β) → Σωστό, γ) → Σωστό, **δ)** → Λάθος, **ε)** → Σωστό

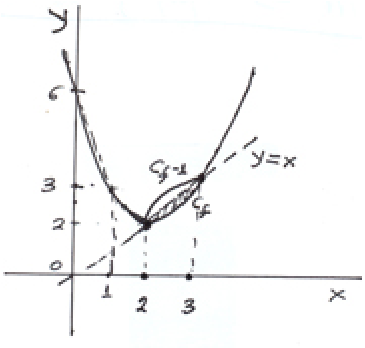
ΘΕΜΑ 2ο

α) Για την συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$, με $x \geq 2$ έχουμε: $f'(x) = 2.(x-2), x \geq 2$. Είναι, δε, $f'(x) = 2.(x-2) > 0, \forall x > 2$.
Έχουμε, δηλαδή: f συνεχής στο Δ=$[2, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο τού Δ. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ, δηλαδή $\forall x \geq 2$.
Αφού, τώρα, η f είναι γνησίως αύξουσα $\forall x \geq 2$, **τότε είναι και 1-1,** $\forall x \geq 2$.
β) Αφού η f είναι 1-1 στο $[2, +\infty)$**,** τότε αντιστρέφεται σ' αυτό. Θα βρούμε τον τύπο τής f^{-1}:
$y = 2 + (x-2)^2$, όπου $x \geq 2$. Λύνουμε την εξίσωση ως προς $x \geq 2$: $(x-2)^2 = y - 2$. Εδώ πρέπει να είναι $y - 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2$. Υπό αυτόν τον περιορισμό, έχουμε: $|x-2| = \sqrt{y-2}$, και επειδή $x \geq 2$, θα είναι $x - 2 = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow \underline{x = 2 + \sqrt{y-2}}$, με $y \geq 2$. Άρα, θα είναι $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$, με $x \geq 2$, η αντίστροφη τής $f(x) = 2 + (x-2)^2$.
γ) ι) Τα σημεία τομής τών γραφικών παραστάσεων $C_f, C_{f^{-1}}$ ευρίσκοντα επάνω στην διχοτόμο $y = x$, οπότε αυτά μπορούν να βρεθούν εάν λύσουμε την εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x)$ ή την εξίσωση: $f(x) = x$. Είναι, λοιπόν:

$f(x)=x \Leftrightarrow 2+(x-2)^2=x \Leftrightarrow x^2-5.x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$. Άρα, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$ είναι τα Α(2, $f(2)$), Β(3, $f(3)$), δηλαδή: Α(2,2) και Β(3,3).

ιι)
Επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο $y=x$. το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

Ε=2. $\int_2^3 |f(x)-x|dx$



Υπολογίζουμε το πρόσημο τής διαφοράς: $f(x)-x=...=x^2-5x+6$ στο διάστημα $[2,3]$.
Εύκολα διαπιστώνουμε, ότι οι ρίζες τής εξισώσεως $x^2-5x+6=0$ είναι $x=2$ και $x=3$. Τότε: $\forall x \in [2,3]$ είναι $x^2-5x+6 \leq 0$, δηλ. $f(x)-x \leq 0$.
Τότε, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:
Ε=2. $\int_2^3 |f(x)-x|dx$ =2. $\int_2^3 |x^2-5x+6|dx = 2.\int_2^3 (-x^2+5x-6)dx$ =2. $\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3$ =
=2.($\left[-\frac{1}{3}3^3+\frac{5}{2}.3^2-6.3\right]-\left[-\frac{1}{3}2^3+\frac{5}{2}.2^2-6.2\right]$)=2.(-9+ $\frac{45}{2}$ -18) - 2.(- $\frac{8}{3}$ + $\frac{5}{2}$ .4-12)= (-54+45)- (- $\frac{16}{3}$ +20- -24)= -9+4+ $\frac{16}{3}$ = -9+4+5+ $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{3}$ τετρ. μονάδες

ΘΕΜΑ 3º

α) i) Θα αποδείξουμε πρώτα $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$ (α). Ισχύουν από υπόθεση: $z_1+z_2+z_3=0$ (1) και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ (2)

Είναι $|z_1-z_2|=|z_2-z_3| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |z_1+z_1+z_3|=|-z_1-z_3-z_3| \Leftrightarrow |2.z_1+z_3|=|z_1+2.z_3| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2.z_1+z_3|^2=|2.z_3+z_1|^2 \Leftrightarrow (2.z_1+z_3).(2.\bar{z}_1+\bar{z}_3)=(2.z_3+z_1).(2.\bar{z}_3+\bar{z}_1)$

$\Leftrightarrow 4.z_1.\bar{z}_1+2.z_1.\bar{z}_3+2.z_3.\bar{z}_1+z_3.\bar{z}_3=4.z_3.\bar{z}_3+2.z_3.\bar{z}_1+2.z_1.\bar{z}_3+z_1.\bar{z}_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3.|z_1|^2=3.|z_3|^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3=3$, το οποίον ισχύει προφανώς. Άρα ισχύει και η (α). **Ομοίως αποδεικνύουμε και** $|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ (β)

Οπότε, από (α) και (β) συνεπάγεται η ισχύς τής αποδεικτέας $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

ii) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:
$|z_1-z_2| \leq |z|+|-z_2|=|z|+|z_2|=1+1=2 \Rightarrow |z_1-z_2| \leq 2 \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2 \leq 4$, **όπερ έδει δείξαι**.

Εξ άλλου, από $|z_1 - z_2|^2 \le 4$ έχουμε ισοδυνάμως: $(z_1 - z_2).(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1.\bar{z}_1 - z_1.\bar{z}_2 - z_2.\bar{z}_1 + z_2.\bar{z}_2 \le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1.\bar{z}_2 - z_2.\bar{z}_1 + |z_2|^2 \le 4 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2 - z_1.\bar{z}_2 - z_2.\bar{z}_1 \le 4 \Leftrightarrow z_1.\bar{z}_2 + z_2.\bar{z}_1 \ge -2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow z_1.\bar{z}_2 + \overline{z_1.\bar{z}_2} \ge -2 \Leftrightarrow 2.\mathrm{Re}(\,z_1.\bar{z}_2) \ge -2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\,z_1.\bar{z}_2\,) \ge -1$, **όπερ έδει δείξαι.**

β) Έστωσαν Α(z_1), Β(z_2), Γ(z_3) οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο, αντιστοίχως, τών μιγαδικών z_1 , z_2 , z_3 .

Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, τότε οι εικόνες Α(z_1), Β(z_2), Γ(z_3) **<u>ευρίσκονται</u> επάνω στον κύκλο με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.**

Εξ άλλου, η σχέση $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, μάς δίδει (ΑΒ)=(ΒΓ)=(ΓΑ), δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ τών εικόνων τών μιγαδικών z_1 , z_2 , z_3 , είναι ισόπλευρο.

Τελικώς, οι εικόνες τών μιγαδικών z_1 , z_2 , z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.

<u>ΘΕΜΑ 4º</u>

α) Για την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$, πρέπει να ισχύουν: $x \neq 1$ και $x > 0$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι: D=(0,1) $\cup\,(1,+\infty)$.

Προκειμένου να εύρουμε το σύνολο τιμών της, θα την μελετήσουμε ως προς την μονοτονία.

Η f είναι παραγωγίσιμη παντού στο D, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων σ' αυτό. Είναι, λοιπόν:

$f'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1} - \ln x\right)' = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' - (\ln x)' = \dfrac{(x+1)'(x-1)-(x-1)'(x+1)}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} < 0$, για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$. Οπότε, είναι f **γνησίως φθίνουσα** τόσον στο διάστημα (0,1) , όσον και στο $(1,+\infty)$, ενώ είναι και συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά, ως παραγωγίσιμη σ' αυτά. Επομένως, το σύνολο τιμών της θα είναι $f(D) = f((0,1)) \cup f((1,+\infty)) = f(D_1) \cup f(D_2)$, όπου D_1=(0,1), και D_2=$(1,+\infty)$.

Έχουμε:

ι) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, διότι: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x-1} = -1$, και $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x) = +\infty$

ιι) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty$, και $\lim\limits_{x\to 1^-}(-\ln x) = 0$,

Οπότε, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_1, θα είναι $f(D_1) = f((0,1))$ =$(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to o^+} f(x))$ =$(-\infty,+\infty)$.

Ομοίως έχουμε:

ιιι) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, διότι: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$, και $\lim\limits_{x\to 1^+}(-\ln x) = 0$

ιv) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, διότι: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$, και $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\ln x) = -\infty$

Οπότε, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_2, θα είναι

$f(D_2) = f((1,+\infty))$ =$(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x))$ =$(-\infty,+\infty)$.

Τελικώς, το σύνολο τιμών τής f είναι $f(D) = f(D_1) \cup f(D_2)$ =$(-\infty,+\infty)$ $\cup$ $(-\infty,+\infty)$ =$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

β) Θα βρούμε το πλήθος τών ριζών τής εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $D_1 = (0,1)$.

Οι τιμές τής f στο $D_1 = (0,1)$ είναι $f(D_1) = (-\infty,+\infty)$, και η τιμή $y = 0$ ανήκει στο $f(D_1) = (-\infty,+\infty)$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $D_1 = (0,1)$. Επειδή, όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό, τότε θα έχει **ακριβώς μία ρίζα στο $D_1 = (0,1)$.**

Ομοίως, οι τιμές τής f στο $D_2=(1,+\infty)$ είναι $f(D_2)=(-\infty,+\infty)$, και η τιμή $y=0$ ανήκει στο $f(D_2)=(-\infty,+\infty)$. Άρα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $D_2=(1,+\infty)$. Επειδή, όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό, τότε θα έχει **ακριβώς μία ρίζα στο** $D_2=(1,+\infty)$ **.**

Συνεπώς, η συνάρτηση f έχει <u>ακριβώς δύο ρίζες</u> στο πεδίο ορισμού της (0,1)∪(1,+ ∞)

γ) Για την συνάρτηση $g(x)=\ln x$ πρέπει χ>0, και είναι: $g'(x)=\frac{1}{x}$. Οπότε, η εξίσωση τής εφαπτομένης στο σημείο Α(α, lnα) είναι ε_1: $y-g(a)=g'(a).(x-a)$, και επομένως είναι ε_1: $y-\ln a=\frac{1}{a}.(x-a)\Leftrightarrow \underline{y=\frac{1}{a}.x-1+\ln a}$ (1)

Ομοίως, για την συνάρτηση $h(x)=e^x$ είναι $x\in\mathbb{R}$, και $h'(x)=e^x$. Οπότε, η εξίσωση τής εφαπτομένης στο σημείο Β(β,e^{β}) είναι ε_2: $y-h(\beta)=h'(\beta).(x-\beta)$, δηλαδή

$$y=e^{\beta}.(x-\beta)+h(\beta)\Leftrightarrow y=e^{\beta}(x-\beta)+e^{\beta}\Leftrightarrow y=e^{\beta}.x-\beta.e^{\beta}+e^{\beta}\quad (2)$$

Επειδή, τώρα, οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 ταυτίζονται, πρέπει (και αρκεί) να είναι (από (1) και (2)): $e^{\beta}=\frac{1}{\alpha}$ (1_α) και $-1+\ln a=-\beta.e^{\beta}+e^{\beta}$ (2_α).

Η (1_α) δίδει: $\beta=-\ln a$, οπότε η (2_α) δίδει:

$$-1+\ln\alpha=\frac{1}{a}\ln a.+\frac{1}{a}\Leftrightarrow -a+a\ln a=\ln a+1\Leftrightarrow (a-1).\ln a=a+1\Leftrightarrow \ln a=\frac{a+1}{a-1}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \underline{\frac{a+1}{a-1}-\ln a=0}$ (*). Η σχέση (*) δηλώνει, ότι το χ=α είναι ρίζα τής συναρτήσεως $f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\ln x$

δ) Στο γ) εδείξαμε, ότι οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία $A(a,\ln a)$ και $B(\beta,e^{\beta})$ των C_g και C_h αντιστοίχως είναι: $y=\frac{1}{a}.x-1+\ln a$, και $y=e^{\beta}.x-\beta.e^{\beta}+e^{\beta}$. (3)

Για να εκφράζουν αυτές οι εξισώσεις κοινή εφαπτομένη, πρέπει, όπως εδείξαμε στο γ),(αλλά και αρκεί) να είναι:

$e^{\beta}=\frac{1}{\alpha}$ (1_α) και $-1+\ln a=-\beta.e^{\beta}+e^{\beta}$ (2_α).

Για να έχουμε, τώρα, δύο κοινές εφαπτόμενες, πρέπει (αλλά και αρκεί) το Σύστημα τών (1_α) και (2_α) να έχει **ακριβώς δύο λύσεις.**

Αλλά, εδείξαμε, ότι από (1_α) και (2_α) παίρνουμε $\underline{\frac{a+1}{a-1}-\ln a=0}$ (*). Η εξίσωση (*), όπως ήδη εδείξαμε, έχει ακριβώς δύο λύσεις. Άρα, οι κοινές εφαπτόμενες είναι όσες οι ρίζες τής (*), δηλαδή ακριβώς δύο.-

----------------- ... .

<u>Επιμέλεια Λύσεων:</u> **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**