ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ (ΤΕΕ)
ΤΕΤΑΡΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Χρόνια Υπηρεσίας X	[0 – 10)	[10 – 20)	[20 – 30)	[30 – 40)
Πλήθος Εργαζομένων v_i	10	α	20	5

α) Εδώ έχουμε ομαδοποιημένη Κατανομή, γι' αυτό και θα συμπληρώσουμε τον ανωτέρω πίνακα με τις κεντρικές τιμές τών κλάσεων.

Χρόνια Υπηρεσίας X	[0 – 10)	[10 – 20)	[20 – 30)	[30 – 40)
Κεντρικές Τιμές x_i	5	15	25	35
Πλήθος Εργαζομένων v_i	10	α	20	5

Η μέση τιμή τού δείγματος είναι: $\overline{X} = \dfrac{5.10+15.a+25.20+35.5}{10+a+20+5} = \dfrac{725+15.a}{35+a}$, και επειδή μάς δίδεται, ότι: $\overline{X} = 19$,

θα έχουμε: $\dfrac{725+15.a}{35+a} = 19 \Leftrightarrow 725+15.a = 19.35+19.a \Leftrightarrow 4.a = 725-665 \Leftrightarrow 4.a = 60 \Leftrightarrow a = 15$. ό.έ.δ.

β) Για α=15, κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων **(v_i)**, Αθροιστικών συχνοτήτων **(N_i)**, και σχετικών συχνοτήτων **(f_i%):**

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα f_i%
[0 – 10)	5	10	10	20,0
[10 – 20)	15	15 (α)	25	30,0
[20 – 30)	25	20	45	40,0
[30 – 40)	35	5	50	10,0
	Σύνολο	**50**		**100**

Επειδή: $\dfrac{10}{50} = \dfrac{20}{100} = 20,0\%$, $\dfrac{15}{50} = \dfrac{30}{100} = 30,0\%$, $\dfrac{20}{50} = \dfrac{40}{100} = 40,0\%$, $\dfrac{5}{50} = \dfrac{10}{100} = 10,0\%$.

γ. Από τον τελευταίον πίνακα, φαίνεται ότι: λιγώτερα από 30 χρόνια υπηρεσίας έχουν 20+15+10=45 εργαζόμενοι.

δ. Από τον τελευταίον πίνακα, φαίνεται ότι: τουλάχιστον 20 χρόνια υπηρεσίας έχουν 20+5=25 εργαζόμενοι, δηλαδή ποσοστό $\dfrac{25}{50} = 50\%$ τών εργαζομένων.

ΘΕΜΑ 2ο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda x - 3, x \le 1 \\ 2x - \lambda, x > 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Είναι : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+\lambda x-3) = 1^2+\lambda.1-3 = \lambda-2$,

β. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x-\lambda) = 2.1-\lambda = 2-\lambda$.

γ. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, εάν (και μόνον εάν) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lambda - 2 = 2 - \lambda = f(1)$. Αλλά, $f(1) = \lambda - 2$. Οπότε: $\lambda - 2 = 2 - \lambda \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ για $\lambda = 2$.

δ. Για $\lambda = 2$, η f γίνεται: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \le 1 \\ 2x - 2, & x > 1 \end{cases}$

Θα ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα τής f στο $x_0 = 1$.

Έχουμε, λοιπόν, κατά τον ορισμό τής παραγώγου:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2+2x-3)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2+2x-3)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x+3) = 4$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(2x-2)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(2x-2)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(2) = 2.$$

Τώρα, επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, η f **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο $x_0 = 1$.

ΘΕΜΑ 3º

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **με** $f'(x) = 2x - 6$

α) Επειδή $f'(x) = 2x - 6 = (x^2)' - (6x)' = (x^2 - 6x)'$, **συνάγεται ότι** η αρχική (παράγουσα) f είναι: $f(x) = x^2 - 6x + c$. Μάς δίδεται, όμως, $f(0) = 5$. Οπότε: $f(0) = 5 \Leftrightarrow (0^2 - 6.0 + c) = 5 \Leftrightarrow c = 5$.

Επομένως, η αρχική συνάρτηση είναι: $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

β.

(ι). Για τον έλεγχο τής μονοτονίας:

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική.

Ελέγχουμε το πρόσημο τής πρώτης παραγώγου $f'(x) = 2x - 6$**:**

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ **.**

Και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 3$**.**

Επομένως, η f είναι:

<u>Γνησίως αύξουσα</u> στο διάστημα $[3, +\infty)$**.**

<u>Γνησίως φθίνουσα</u> στο διάστημα $(-\infty, 3]$**.**

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον κατωτέρω πίνακα:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↘		↗

Ελάχ.

(ιι). Από τον ανωτέρω πίνακα και τα εκτεθέντα, προκύπτει, ότι η f έχει **ελάχιστο** στην θέση $x_0 = 3$, το οποίον είναι $f(3) = 3^2 - 6.3 + 5 = -4$. Η f δεν έχει άλλα ακρότατα, επομένως, το προηγούμενο ελάχιστο είναι **ολικό.**

γ. Από $f'(x) = 2x - 6$ **συνάγεται,** ότι: $f''(x) = (2x - 6)' = 2$

Επομένως: $f''(2) = 2$ και $f''(-3) = 2$

ΘΕΜΑ 4º

Ο τύπος τού διαστήματος είναι: $S(t) = 5t^2$

α. Το διάστημα S, που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο t=2 sec, θα είναι : $S(2) = 5.2^2 = 20m$

β. Το σώμα αφήνεται από ύψος 45 μέτρων. Όταν το σώμα φθάσει στο έδαφος, θα έχει διανύσει διάστημα 45 μέτρων. Δηλαδή, $S(t) = 5t^2 = 45 \Leftrightarrow t_2 = 9 \Leftrightarrow t = 3\sec$ (αφού $t \ge 0$). ό.έ.δ.

γ) ι) Η ταχύτητα υ τού σώματος σε κάθε χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος $S^{'}(t)=(5t^2)'=10t$

ιι) Το σώμα φθάνει στο έδαφος σε $t=3\sec$. Άρα, η ταχύτητα τού σώματος, όταν αυτό προσκρούει στο έδαφος, είναι: υ= $S^{'}(3)=10.3=30\,{}^{m}\!/_{\sec}$.-

----------------- ... .

<u>Επιμέλεια Λύσεων:</u> **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**