ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ (ΤΕΕ)
ΤΕΤΑΡΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1º

α. $CV = \dfrac{S}{\overline{X}} \Leftrightarrow 0,2 = \dfrac{4}{\overline{X}} \Leftrightarrow \overline{X} = 20$, **ό.έ.δ.**

β. $\overline{X} = \dfrac{16+14+22+18+20+a}{5} \Leftrightarrow 20 = \dfrac{90+a}{5} \Leftrightarrow a = 100-90 \Leftrightarrow a = 10$.

γ. Για α=10, οι παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειράν είναι: 14, 16, 18, 22, 30, οπότε η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή: $\delta = 18$.

δ. Επειδή ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = 0,2 = 20\% > 10\%$, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2º

α. Είναι $f(x) = 4x^3 - 12x + 2006 = (x^4)' - (6x^2)' + (2006x)' = (x^4 - 6x^2 + 2006x)'$. Επομένως, η παράγουσα F τής f είναι: $F(x) = x^4 - 6x^2 + 2006x + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

β. Ο ρυθμός μεταβολής τής f για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι η παράγωγος αυτής στο x. Δηλαδή,

$$f'(x) = (4x^3 - 12x + 2006)' = (4x^3)' - (12x)' + (2006)' = 4(x^3)' - 12(x)' + 0 = 4.3x^2 - 12.1 = 12x^2 - 12$$

γ. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 12(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$. Ενώ:

Η f είναι συνεχής παντού μέσα στο $\mathbb{R}$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$, και

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Σχηματίζουμε τώρα τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Από τα ανωτέρω συνάγεται, ότι: η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε κάθε ένα από τα διαστήματα ($-\infty$, -1], [1, $+\infty$), ενώ στο διάστημα [-1, +1] είναι **γνησίως φθίνουσα.**

ΘΕΜΑ 3º

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}.a \ , \ \chi > 2 \\ 4 \ , \ x = 2 \\ ax + \beta \ , \ x < 2 \end{cases}$$

α. Όταν $\chi \to 2^+$**, είναι χ>2**, οπότε $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}.a = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}.a$ = α.(χ+2), και επομένως:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}[a.(x+2)] = 4a$.

β. Όταν $x \to 2^-$**, είναι χ<2, οπότε** $f(x) = ax + \beta$, και επομένως: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(ax+\beta) = 2a + \beta$

γ. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 2$, πρέπει και αρκεί: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, δηλαδή: $4a = 2a + \beta = 4$, αφού $f(2) = 4$. Η σχέση $4a = 2a + \beta = 4$ δίδει: $4a = 4$, και $2a + \beta = 4$. Οπότε: $a = 1$ και

$2.1+\beta=4 \Leftrightarrow \beta=2$. Τελικώς, δηλαδή, $a=1$ και $\beta=2$

δ. Για α=1 και β=2, η f γίνεται:

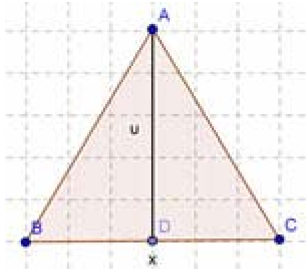
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, \chi>2 \\ 4, x=2 \\ x+2, x<2 \end{cases}$$

Επομένως, $f(0)=0+2=2$, και $f(3)=\dfrac{3^2-4}{3-2}=\dfrac{5}{1}=5$

ΘΕΜΑ 4º

α. Έστω υ το ύψος τού τριγώνου, το οποίον αντιστοιχεί στην βάση χ αυτού. Τότε ισχύει: χ+υ =50 (1)
Από (1)$\Rightarrow$υ=50-χ (2)
Τώρα, πρέπει υ>0 και χ>0. Άρα, πρέπει 50-χ>0$\Leftrightarrow$ 0<χ<50

Το εμβαδόν τού τριγώνου είναι: Ε(χ)=$\dfrac{x.\upsilon}{2}=\dfrac{\chi.(50-\chi)}{2}, 0<\chi<50$



β. Για να ελέγξουμε πότε το Ε(χ) γίνεται μέγιστο, θα μελετήσουμε μονοτονία και ακρότατα τής συναρτήσεως Ε(χ):
Για 0<χ<50 έχουμε:
Ε(Χ) συνεχής συνάρτηση, ως πολυωνυμική.

Ε′(χ)=$[\frac{1}{2}\chi(50-\chi)]'=(25\chi-\frac{1}{2}\chi^2)'=25-\chi$

Ε′(χ)=0$\Leftrightarrow$ 25-χ=0$\Leftrightarrow$ **χ=25**

Ε′(χ)>0$\Leftrightarrow 25-\chi>0 \Leftrightarrow \chi<25$, ενώ Ε′(χ)<0$\Leftrightarrow$ 25-χ<0$\Leftrightarrow$ χ>25

Τα ανωτέρω συμπεράσματα συνοψίζονται εις τον κατωτέρω πίνακα:

x	0		25		+50
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Μέγιστο

Για χ=25 το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

γ. Το μέγιστον εμβαδόν είναι: Ε(25)=$\frac{1}{2}.25.(50-25)=\frac{1}{2}25.25=312,5cm^2$.-

----------------- ... .

Επιμέλεια Λύσεων: **Άγγελος Λιβαθινός, Μαθηματικός-Λυκειάρχης**