

Οι αλγεβρικές παραστάσεις

Γενικά

Στα Μαθηματικά (επιστήμη της μελέτης των μεγεθών, των ποσοτήτων, των σχημάτων κλπ) μετά τον 17 αιώνα άρχισαν να χρησιμοποιούνται γράμματα για τον συμβολισμό είτε των μεγεθών είτε των ποσοτήτων (μέτρα μεγεθών).

Τα γράμματα εκτός κάποιων (όπως π , ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς την διάμετρό του, το φ ο λόγος της χρυσής τομής, το e η βάση των φυσικών λογαρίθμων και άλλα, τα οποία θεωρούνται σταθερές) παίρνουν τιμές από κάποιο σύνολο αριθμών ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$).

Τα γράμματα που χρησιμοποιούμε στην Άλγεβρα ονομάζονται **μεταβλητές** (γενικά κάποιες ποσότητες) ή **άγνωστοι** (ζητούμενες ποσότητες) ή

σταθερές ($\pi \approx 3,14159\dots$, $\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618\dots$, $e \approx 2,718\dots$)

Άλγεβρική παράσταση λέγεται κάθε έκφραση που χρησιμοποιεί τις πράξεις στο $\mathbb{R}$ για αριθμούς και γράμματα.

Τις συμβολίζουμε με κάποιο γράμμα μικρό ή κεφαλαίο βάζοντας σε παρένθεση ποια είναι η μεταβλητή της ή οι μεταβλητές της.

Όταν οι μεταβλητές πάρουν συγκεκριμένες τιμές (αντικαθιστώντας τις) και κάνοντας τις πράξεις που σημειώνονται στην παράσταση προκύπτει ένας αριθμός που ονομάζεται **αριθμητική τιμή** της παράστασης.

Ορολογία «ονοματολογία» αλγεβρικών παραστάσεων

Με τις πράξεις που ορίζονται στο $\mathbb{R}$ έχουμε τα εξής:

Η έκφραση $x+y$ είναι το **άθροισμα** των $x, y \in \mathbb{R}$.

Τα x, y ονομάζονται **προσθετέοι** του αθροίσματος.

Η έκφραση $x \cdot y$ (xy) είναι το **γινόμενο** των $x, y \in \mathbb{R}$.

Τα x, y ονομάζονται **παράγοντες** του γινομένου.

Η έκφραση $x-y$ είναι η **διαφορά του y από το x** , με $x, y \in \mathbb{R}$.

Το x ονομάζεται **μειωτέος** και το y **αφαιρετέος**.

Η έκφραση $x:y = \frac{x}{y}$ είναι το **πηλίκο** των $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}^*$ (οι αριθμοί εκτός του μηδενός).

Το x ονομάζεται **διαιρετέος** και το y **διαιρέτης** (πάντα $y \neq 0$).

Μονώνυμο (η απλούστερη αλγ. Παράσταση)

Η έκφραση x^y ονομάζεται **δύναμη «του x εις την y »**.

Το x ονομάζεται **βάση** και το y **εκθέτης**

Μονώνυμο:

Είναι η απλούστερη αλγ. παράσταση γιατί είναι ένα γινόμενο (περιλαμβάνεται μόνο ο πολλαπλασιασμός) π.χ. $4\alpha\beta\gamma$, $-\frac{1}{2}xy^3\omega^2$, κλπ.

Το σταθερό μέρος ονομάζεται **συντελεστής** και το εγγράμματο **κύριο μέρος**.

Το άθροισμα των εκθετών λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου.

Ενώ **βαθμός ως προς μια μεταβλητή του** λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής.

π.χ. το $-\frac{1}{2}xy^3\omega^2$ είναι μονώνυμο **6^{ον} βαθμού**

είναι μονώνυμο **1^{ον} βαθμού ως προς x**

είναι μονώνυμο **3^{ον} βαθμού ως προς y**

είναι μονώνυμο **2^{ον} βαθμού ως προς ω**

Πολυνώνυμο ή ακέραια παράσταση

Είναι κάθε άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια¹.

π.χ. $\Pi = \alpha x + \beta y + \gamma$,

$P = 2\alpha\beta + 3\chi y - 2$,

¹ Όμοια μονώνυμα είναι αυτά που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

π.χ. $4\alpha\beta^2$ και $-5\alpha\beta^2$ ή $\alpha\beta x$ και $4\alpha\beta x$

$$\alpha(x) = 2x^2 - 3x + 6,$$

$$x(t) = \frac{1}{3}t^2 - 6t,$$

$$s(a) = v_0 + \frac{1}{2}at^2,$$

$$P(x) = -x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 1,$$

$$f(\kappa) = \frac{\sqrt{2}}{3}\kappa^3 - 3\kappa^2 + 4$$

$$g(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^3$$

κλπ.

Κάθε πολυώνυμο είναι σε **ανηγμένη μορφή**, δηλ. σε μορφή όπου έχουν γίνει όλες οι πράξεις με τελική την **αναγωγή ομοίων όρων**.

Διακρίνονται (ταξινομούνται) ως προς το πλήθος των μεταβλητών τους και ως προς τον βαθμό του.

π.χ. η παράσταση $f \equiv^{(2)} ax^2 + bx + \gamma$, με $a, b, \gamma, x \in \mathbb{R}$ είναι πολυώνυμο των a, b, γ, x . Η f είναι τριώνυμο (3 μονώνυμα) ⁽³⁾ **τρίτου βαθμού** (το μονώνυμο ax^2 είναι 3^{ου} βαθμού). Όταν έχουμε $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $b, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ τότε έχουμε το διάσημο **τριώνυμο**. Η σωστή ονομασία του είναι «**πολυώνυμο του x 2^{ου} βαθμού**».

Μεγάλη κατηγορία πολυωνύμων είναι εκείνη αυτών που είναι με **μία μεταβλητή**.

Τότε η μορφή τους είναι συγκεκριμένη και γενικά έχει την μορφή

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Οι αριθμοί $a_k \in \mathbb{R}$ για $k = 0, 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$ λέγονται **συντελεστές του $P(x)$** .

Η μορφή αυτή έχει **τις δυνάμεις της μεταβλητής x σε φθίνουσα σειρά** και λέμε ότι «**το πολυώνυμο είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις τη μεταβλητής του**».

Όταν ο συντελεστής $a_n \neq 0$ λέμε ότι «**το $P(x)$ είναι βαθμού n** »

Κάθε μονώνυμο λέγεται όρος και παίρνει το όνομα του από τον βαθμό του.

Δηλ. στο $a(\kappa) = -3\kappa^4 + 2\kappa^3 - \kappa^2 + 5\kappa - 8$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Το πολυώνυμο a είναι 4^{ου} βαθμού και

ο **$-3\kappa^4$** είναι ο **μεγιστοβάθμιος όρος**

ο **$2\kappa^3$** είναι ο **τριτοβάθμιος όρος**

ο **$-\kappa^2$** είναι ο **δευτεροβάθμιος όρος**

ο **5κ** είναι ο **πρωτοβάθμιος όρος και**

ο **-8** είναι ο **σταθερός όρος** (ή όρος μηδενικού βαθμού)

² Το σύμβολο αυτό « $\equiv$ » σημαίνει «εκ ταυτότητας ίσον» δηλαδή είναι μια σχέση που δίνει μορφή στο σύμβολο που είναι αριστερά του. Στο παράδειγμα, καθορίζει τι «σημαίνει» f .

³ Όταν ένα πολυώνυμο έχει 2 όρους το λέμε **διώνυμο**

Ρητή παράσταση

Είναι κάθε παράσταση που εκφράζεται με κλάσμα δύο πολυωνύμων.

$$\text{π.χ. } \frac{2}{x+3}, \frac{2x+y}{x^2+y^3}, \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta} \text{ κλπ}$$

Έχουν νόημα όταν και μόνο όταν οι μεταβλητές παίρνουν τιμές ώστε οι παρονομαστές τους να έχουν μη μηδενικές τιμές.

Άρρητη παράσταση

Είναι παραστάσεις που οι ακέραιες ή ρητές περιέχονται σε τετραγωνικές ρίζες.

$$\text{π.χ. } \sqrt{x^2+3x-1}, \sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x^2-4}, \sqrt[4]{\frac{2x-3}{x^2+1}}, \text{ κλπ}$$

Έχουν νόημα όταν και μόνο όταν οι μεταβλητές παίρνουν τιμές ώστε οι υπόρριζες παραστάσεις να έχουν μη αρνητικές τιμές.

Στις επόμενες τάξεις θα ασχοληθούμε και με άλλα είδη αλγεβρικών παραστάσεων