

67. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α. $|2x+3| - |3x+2| = 0$

β. $|x+1| + |x-5| = 20,$

γ. $2|x-8| = \frac{|x-8|}{3} + 5$

δ. $4|1-4x| + 5 = x + 2$

68. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} - 2$
 $1 + \frac{1}{\lambda}$

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A.

β. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός A να είναι ίσος με τον αντίστροφο του.

69. Δίνεται η εξίσωση: $\frac{x+\lambda}{2} - 1 = 2(\lambda x - \frac{1}{4})$, όπου x είναι ο άγνωστος και λ ένας ρητός

αριθμός, που θεωρείται γνωστός. (τέτοιες ποσότητες λέγονται **παράμετροι**).

α. Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 1$.

β. Ποια είναι η τιμή της παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζα (λύση) τον αριθμό $x = 1$

γ. Ποια είναι η τιμή του λ για να είναι η εξίσωση αδύνατη.

70. Δύο πόλεις A και B απέχουν 190,8 Km. Από την πόλη A αναχωρεί για την B αμαξοστοιχία με σταθερή ταχύτητα 42,5 Km/h και την ίδια στιγμή ξεκινά από την B αντίθετα, μια άλλη με επίσης σταθερή ταχύτητα 37 Km/h. Να βρείτε σε πόσες ώρες και σε ποια απόσταση από την πόλη A θα συναντηθούν.

71. Αν τα $\frac{3}{7}$ ενός κεφαλαίου τα τοκίσουμε προς 5% και το υπόλοιπο προς 4,5%

παίρνουμε σε ένα χρόνο από το β' μέρος 1530 € τόκο περισσότερο από το τόκο του πρώτου. Ποιο είναι το αρχικό κεφάλαιο;

72. Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 6 ώρες και μια άλλη σε 4 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή :

α. αν ανοιχτούν και οι δύο βρύσες μαζί; β. Αν η δεύτερη βρύση ανοιχτεί μια ώρα αργότερα από την πρώτη;

73. Δίνεται η εξίσωση $(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να λυθεί.

ii) Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό.

- Είναι αόριστη για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Έχει τουλάχιστον μια λύση για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Είναι αδύνατη για $\alpha = -\beta$
- Έχει ακριβώς μια λύση για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

74. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να λυθούν οι εξισώσεις

α. $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$ β. $(\lambda^2-9)x=\lambda^2+3\lambda$ γ. $\lambda^2(x-2)-3\lambda=x+1$

75. Δίνονται οι εξισώσεις:

$(\lambda-2)x=\lambda^2-4$ (1)

$\lambda^2x(x+1)-2(2x-1)=\lambda(\lambda x^2+1)$ (2)

$\lambda^2x(x+1)-2(2x+1)=\lambda(\lambda x^2+1)$ (3)

Να αποδείξετε ότι:

α. Αν η (1) αληθεύει για κάθε x (ταυτότητα), τότε το ίδιο συμβαίνει και για την (2)

β. Αν η (3) είναι αδύνατη, τότε η (1) είναι ταυτότητα.

76. Δίνονται οι σχέσεις $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (1) και $v_0 = g t$ (2)

α. Να λύσετε την (2) ως προς t ,

β. Να δείξετε ότι $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

77. Για τους x , ψ ισχύει $\psi = \frac{x+2}{2x-4}$.

Να προσδιορίσετε για ποιες τιμές των x και ψ ισχύει, επιλύοντας ως προς x .

Διωνυμες εξισώσεις

78. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $x^3+125=0$,

β. $x^4-81=0$

γ. $2x^3+128=0$

δ. $125x^3-5x=0$

ε. $3x^6-24x^3=0$

στ. $3x^8+2x^2=0$

ζ. $2x^7=-4x^3$

η. $x^5-6x^2=0$

θ. $x^9=7x^4$

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

79. Να λυθούν (στο \mathbb{R}) οι παρακάτω εξισώσεις ως προς x ή y :

α) $x^2 - 4x = 0$

β) $3x^2 = 4x$

γ) $2x^2 + x - 15 = 0$

δ) $5x^2 - 18x - 8 = 0$

ε) $x^2 - 6x + 7 = 0$

στ) $y^2 - y + 1 = 0$.

80. Να βρείτε αν έχει ρίζες (στο \mathbb{R}) και πόσες, καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις χωρίς να τις λύσετε:

α) $-x^2 + 4x + 6 = 0$

β) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

γ) $2x^2 = 4x - 2\sqrt{3} = 0$

δ) $x^2 - 4x + 4 = 0$

ε) $x^2 - 6mx + 9m = 0$

στ) $2x^2 - 3x + 8 = 0$

ζ) $m^2x^2 = m^2 - 5x$

η) $x^2 - (m - 3)x + m - 4 = 0$

θ) $(m - 3)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$

81. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Τα μήκη των τριών πλευρών του είναι:

$x, (x + 3), (x + 6), x \in \mathbb{R}$.

α) Αποδείξτε ότι το x είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 6x - 27 = 0$

β) Λύστε την εξίσωση $x^2 - 6x - 27 = 0$ και εξετάστε αν και οι δύο λύσεις της είναι λύσεις του προβλήματος.

82. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις x και y είναι 24 cm.

Αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου αυξηθούν και οι δύο κατά 2 cm, το εμβαδόν του θα γίνει 60 cm². Να βρεθούν τα x, y .

83. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2x - \mu + 3 = 0$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του μ :

α. αυτή έχει δύο διαφορετικές ρίζες β. αυτή έχει μια διπλή ρίζα γ. δεν έχει ρίζες.

84. Η εξίσωση $\lambda x^2 + 5x + 10 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$:

α. Για ποια τιμή του λ έχει μία λύση;

β. Για ποια τιμή του λ έχει μια λύση διπλή;

γ. Να βρεθεί η διπλή ρίζα.

Ειδικές εξισώσεις

85. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x^2 + 4x)^2 + (x^2 - 16)^2 = 0$ ως προς x

β. $(x^2 - 9)^2 + (2x - 6)^2 + (x^2 - 4x + 3)^2 = 0$ ως προς x

γ. $x^2 + \psi^2 - 2x + 1 = 0$ ως προς x και ψ

δ. $D_x^2 + D_\psi^2 + D_\omega^2 + 2D^2 = 2D(D_x - D_\psi)$ ως προς D_x, D_ψ, D_ω συναρτήσει του D .

ε. $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 1 = 0$

στ. $(x^2 - 4x + 3)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$.

(Υπόδειξη: όταν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 = 0$ τότε $A=B=\Gamma=0$)

86. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

β. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

γ) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

δ) $6y^4 + 17y^2 = -12$

ε. $x^4 - 2(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0$.

(Υπόδειξη: Θέτουμε όπου $x^2 = \psi \geq 0$ και επιλύουμε πρώτα την εξίσωση που προκύπτει)

87. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(\chi + 3)^4 + 2(\chi + 3)^2 - 8 = 0$

β. $\chi^2 + \frac{4}{\chi^2} = 5$

γ. $\left(\frac{\chi - 1}{\chi}\right)^2 - 4\left(\frac{\chi - 1}{\chi}\right) + 3 = 0$

δ. $\left(\frac{\chi - 1}{\chi + 1}\right)^2 + \left(\frac{\chi + 1}{\chi - 1}\right)^2 = \frac{82}{9}$

στ. $(\chi^2 - 4\chi + 5)^2 - (\chi^2 - 4\chi + 3) = 4$.

(Χρησιμοποιούμε κατάλληλη αλλαγή αγνώστου («βοηθητικός άγνωστος»))

Σχέσεις Vieta

88. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες. Στην περίπτωση που έχουν να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών.

α. $x^2 - 3x + 14 = 0$

β. $-x^2 + 4x + 6 = 0$

γ. $2x^2 + 3x + 1 = 0$

δ. $2x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$

ε. $x^2 + x(1 + 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = 0$

89. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$. Να βρεθεί ο λ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$$

90. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$ είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης $\lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2 = 0$ με $\lambda \neq 0$ είναι αντίστροφες τότε:

α) να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ

β. να λυθούν οι εξισώσεις για τις τιμές των λ και μ που βρήκατε.