

Ενότητα : Διάταξη των πραγματικών αριθμών

Εκφράσεις

Λεκτική διατύπωση	Συμβολική γραφή
Ο αριθμός x είναι θετικός	$x > 0$
Ο αριθμός x είναι μη αρνητικός	$x \geq 0$
Ο αριθμός x είναι αρνητικός	$x < 0$
Οι αριθμοί x, ψ είναι ομόσημοι	$x\psi > 0$
Οι αριθμοί x, ψ είναι ετερόσημοι	$x\psi < 0$
Η παράσταση A έχει ελάχιστο K	$A \geq K$
Η παράσταση A έχει μέγιστο K	$A \leq K$
Ο αριθμός x παίρνει τιμές από το α μέχρι το β	$\alpha \leq x \leq \beta$

Βασικοί χειρισμοί σε ανισότητες – Ιδιότητες

- I.** Μεταβατική ιδιότητα $\left. \begin{matrix} \alpha > \beta \\ \beta > \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha > \gamma$
- II.** Μπορούμε να προσθαφαιρούμε από τα μέλη μιας ανισότητας οποιοδήποτε αριθμό. **Δηλ.** Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha \pm \kappa < \beta \pm \kappa$ (νόμος διαγραφής)
- III.** Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κάθε ανισότητα με ένα αριθμό α **θετικό** και **να μην αλλάξει** η φορά ενώ αν α **αρνητικός** η φορά **αλλάζει**.
Δηλ. Αν $\alpha < \beta$ και κ **Θετικός** τότε $\alpha\kappa < \beta\kappa$ (ίδια φορά) ενώ αν κ **αρνητικός** τότε $\alpha\kappa > \beta\kappa$. (αλλαγή φοράς)
- IV.** Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη ανισότητες της ίδιας φοράς.
Δηλ. $\left. \begin{matrix} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$
- V.** Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη ανισότητες της ίδιας φοράς με **μέλη θετικά**. **Δηλ.** Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ και $\left. \begin{matrix} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\delta$.
- VI.** Μπορούμε να υψώνουμε και τα δύο **θετικά** μέλη μια ανισότητας σε κάθε δύναμη με εκθέτη **φυσικό** αριθμό.
Δηλ. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^v < \beta^v$ για κάθε $v \in \mathbb{N}$.
- VII.** Μπορούμε να αντιστρέφουμε τα **θετικά μέλη** μια ανισότητας αλλάζοντας την φορά της. **Δηλ.** Αν $0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0$.

Μια βασική συνέπεια χρήσιμη σε λύση εξισώσεων

$$\text{Ισχύει ότι: αν } A^2+B^2+\Gamma^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 . \\ \Gamma = 0 \end{cases}$$

Μεθοδολογικές παρατηρήσεις

Για την απόδειξη ανισοτήτων εργαζόμαστε με ένα από τους εξής τρόπους:

Μέθοδος 1^η

Με χρήση της ισοδυναμίας $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \geq 0$.

Η μελέτη του πρόσημου μιας παράστασης γίνεται με δύο τρόπους:

I. Με την παραγοντοποίηση της παράστασης και μελέτη του πρόσημου κάθε παράγοντα,

II. Με μετασχηματισμό της παράστασης σε άθροισμα ομόσημων όρων.

Μέθοδος 2^η

Μετασχηματίζοντας την δεδομένη σχέση με την χρήση των ιδιοτήτων σε ισοδύναμες που ισχύουν.

Μέθοδος 3^η

Να χρησιμοποιούμε βασικές σχέσεις και να καταλήγουμε στην ζητούμενη ανισότητα.

Βασικές ανισότητες

α. $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το διπλάσιο του γινομένου τους δηλ. $\boxed{a^2+b^2 \geq 2ab}$

γ. Το άθροισμα δύο θετικών αντίστροφων αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το 2,

Δηλ. $\boxed{\text{αν } x > 0 \text{ τότε } x + \frac{1}{x} \geq 2}$

δ. Το άθροισμα δύο αρνητικών αντίστροφων αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο από το

-2 , Δηλ. $\boxed{\text{αν } x < 0 \text{ τότε } x + \frac{1}{x} \leq -2}$,

ε. Όταν είναι $\Delta < 0$ ισχύει $ax^2 + \beta x + \gamma > 0$ με $a > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ενώ αν είναι $\Delta = 0$ τότε $ax^2 + \beta x + \gamma \geq 0$ με $a > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.¹

¹ Το « $\Rightarrow$ » ισχύει όταν το x είναι η διπλή ρίζα.

στ. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \text{ (το ίσον μόνο όταν } \alpha = \beta = 0)}$

Παραδείγματα

1° Άσκηση

Αν $\alpha \geq -1$, να δείξετε ότι : $\alpha^3 + 1 \geq \alpha^2 + \alpha$.

Λύση

$$\begin{aligned}\text{Επειδή} \quad \alpha^3 + 1 - \alpha^2 - \alpha &= \\ \alpha^2(\alpha - 1) - (\alpha - 1) &= \\ (\alpha - 1)(\alpha^2 - 1) &= \\ (\alpha - 1)^2(\alpha + 1) &\geq 0 \text{ αφού } \alpha > -1 \text{ και } (\alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} .\end{aligned}$$

2° Άσκηση

Να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$.

Λύση

$$\begin{aligned}\text{Είναι} \quad (\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta + 8\beta^2 &= \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\alpha\beta + 8\beta^2 &= \\ \alpha^2 + 6\alpha\beta + 9\beta^2 &= \\ (\alpha + 3\beta)^2 &\geq 0 \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

3° Άσκηση

Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + 2 \geq 2(\alpha + \beta)$.

Λύση

$$\begin{aligned}\text{Είναι} \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2 - 2(\alpha + \beta) &= \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2 - 2\alpha - 2\beta &= \\ \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 2\beta + 1 &= \\ (\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 &\geq 0 \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (Πότε ισχύει το «=»;)}\end{aligned}$$

4° Άσκηση

Αν οι α, β είναι θετικοί αριθμοί να δείξετε ότι : $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$.

Λύση

$$\begin{aligned}\text{Η αποδεικτέα γίνεται} \quad (\alpha + \beta) \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} &\geq 4 \Leftrightarrow \\ (\alpha + \beta)^2 &\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\text{αφού } \alpha\beta > 0) \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \\ \alpha^2 + \beta^2 &\geq 2\alpha\beta \text{ που ισχύει (βασική ανισότητα)}\end{aligned}$$

5^ο Άσκηση

Να αποδείξετε ότι:

α. $2a^2+2a+1 > 0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

β. $a^2+b^2+2 \geq 2(a+b)$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

γ. $a^2-4a+5 > 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Λύση

α. Είναι $a^2 \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

και $a^2+2a+1 = (a+1)^2 \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Επομένως προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $a^2 + a^2+2a+1 > 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2a + 1 > 0$.

το « $\Rightarrow$ » απορρίπτεται διότι η $a = a + 1$ είναι αδύνατη.

β. Είναι $(a-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

και $(b-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + 1 \geq 2b$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$a^2+1 + b^2 + 1 \geq 2a+2b \Leftrightarrow a^2+b^2 + 2 \geq 2(a+b)$$

γ. Επειδή $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -4 < 0$ είναι $a^2 - 4a + 5 > 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος με συμπλήρωση τετραγώνου

Είναι $a^2-4a+5 = a^2-4a + 4 + 1 = (a-2)^2+1 > 0$ για κάθε τιμή του $a \in \mathbb{R}$.