

22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB \neq A\Gamma$) και στην διχοτόμο της γωνίας A παίρνουμε σημεία K, Λ , τέτοια ώστε $AK = AB$ και $A\Lambda = A\Gamma$. Να δείξετε ότι $B\Lambda = K\Gamma$.
23. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις ίσες πλευρές του AB και $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $A\Delta = \kappa AB$ και $AE = \kappa A\Gamma$ (κ ένας θετικός αριθμός με $0 < \kappa < 1$).
Να αποδείξετε ότι το μέσο M της $B\Gamma$ ισαπέχει από τα Δ και E .
24. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και σημείο του Λ . Γράφουμε τον κύκλο (Λ, ρ) και ονομάζουμε A ένα κοινό σημείο τους. Αν οι AK και $A\Lambda$ τέμνουν τους (K, ρ) και (Λ, ρ) αντίστοιχα στα σημεία E και Z να δείξετε ότι $EL = KZ$.
25. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A < 90^\circ$ φέρνουμε $A\chi \perp AB$ και $A\psi \perp A\Gamma$ έτσι ώστε οι $\widehat{BA\chi}$ και $\widehat{\Gamma A\psi}$ να είναι εφεξής με την γωνία A του τριγώνου. Παίρνουμε Δ στην $A\chi$ και E στην $A\psi$ έτσι ώστε $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Αν K, Λ τα μέσα των BE και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα να δείξετε ότι :
α. $BE = \Gamma\Delta$ και
β. το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ισοσκελές.
26. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι AM η διάμεσος. Προεκτείνουμε την BA κατά $A\Delta = AB$ και την ΓA κατά $AE = A\Gamma$. Να δείξετε ότι η AM διχοτομεί την ΔE .
27. Στις προεκτάσεις, προς το A , των ίσων πλευρών ($AB=A\Gamma$) ισοσκελούς $AB\Gamma$ παίρνουμε $A\Delta = AE$ αντίστοιχα. Αν το AM το ύψος τότε είναι ΔME ισοσκελές.
28. Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο σημεία A και B και με διάμετρο $AB = 2\rho$ γράφουμε κύκλο κέντρου O . Γράφουμε επίσης τους κύκλους (A, ρ) και (B, ρ) που τέμνουν το ίδιο ημικύκλιο του κύκλου (O, ρ) στα Γ και Δ αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \widehat{B\hat{O}\Delta}$
29. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ισόπλευρο. Προεκτείνουμε τις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ και παίρνουμε $B\Delta = \Gamma E = AZ$ αντίστοιχα προς το ίδιο μέρος. Να δείξετε ότι το ΔEZ είναι ισόπλευρο.

30. Δίνεται γωνία $\hat{\chi}\hat{O}\psi$. Φέρνουμε $O\zeta \perp O\chi$, στο ίδιο μέρος με την $O\psi$ και $O\delta \perp O\psi$, στο ίδιο μέρος με την $O\chi$. Παίρνουμε επάνω στις $O\chi, O\zeta$ τμήματα $OM = ON$ αντίστοιχα και πάνω στις $O\psi, O\delta$, $OP = OS$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι
- α. $\hat{O}PN = \hat{O}SM$ και
- β. αν K, Λ μέσα των PN και MS αντίστοιχα, $OK = OL$.
31. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB και AG ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα ίσα τμήματα BD και GE αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
- α. $AD = AE$ και $BE = \Gamma D$,
- β. $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{E} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{E}$,
- γ. Αν O είναι το σημείο τομής BE και ΓD , τότε τα τρίγωνα $OB\Gamma$ και BDE είναι ισοσκελή,
- δ. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ περνά από το O .
32. Εξωτερικά του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = AG$) κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$, ΓAE και ABZ . Να αποδειχθεί ότι το ΔEZ είναι ισοσκελές.
33. Στις ίσες πλευρές AB, AG ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία E και Z έτσι ώστε $AE = AZ$. Αν M τυχαίο σημείο της διχοτόμου AD και οι EM, ZM τέμνουν την $B\Gamma$ στα σημεία K , και Λ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
- α. $\hat{AEM} = \hat{AZM}$, β. $BK = \Gamma\Lambda$.
34. Έστω M το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB . Στο ίδιο ημιεπίπεδο της AB παίρνουμε τα σημεία K και Λ έτσι ώστε να είναι $AK = B\Lambda$ και $MK = M\Lambda$. Να δείξετε ότι $\hat{ABK} = \hat{BAL}$.
35. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG > B\Gamma$. Στην προέκταση τη AB προς το B παίρνουμε $B\Delta = AB - B\Gamma$ και κατόπιν προεκτείνουμε την $B\Gamma$ κατά $\Gamma E = B\Delta$. Να δείξετε ότι :
- α. το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές και
- β. $\hat{ADE} = \frac{\hat{BAG} + \hat{AED}}{2}$.

36. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην ημιευθεία AB παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην ημιευθεία $A\Gamma$ σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AB$. Να δείξετε ότι η ΔE τέμνει την $B\Gamma$ σε σημείο K και ότι η AK είναι διχοτόμος τους τριγώνου.
37. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε την γωνία $\hat{A\hat{O}B}$ και το μέσον Γ του μικρότερου τόξου της AB . Φέρνουμε την χορδή MN κάθετη στην ακτίνα OG , που τέμνει την OA στο Δ και την OB στο E . Να δείξετε ότι $M\Delta = NE$ και $A\Delta = BE$.
38. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε $A\chi \perp AB$ και $A\psi \perp A\Gamma$ έτσι ώστε η $\hat{A}$ να περιέχεται στις δύο ορθές. Στην $A\chi$ παίρνουμε $A\Delta = AB$ και στη $A\psi$ $AE = A\Gamma$. Αν K το μέσο του BE και Λ το μέσο του $\Gamma\Delta$ να δείξετε ότι το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ορθογώνιο.
39. Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι AM διάμεσος, Δ το μέσο της AM και $B\Delta = \frac{1}{2} B\Gamma$.
Να αποδειχθεί ότι :
- α. $\hat{A\Delta B} = \hat{A\Delta M\Gamma}$ β. $AB = \Delta\Gamma$.
40. Στην προέκταση της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία Δ , E έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$ να δειχθεί ότι :
- α. $K\Delta = \Lambda E$, β. $AK = A\Lambda$.
41. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε στη βάση του $B\Gamma$ σημεία M, N έτσι ώστε $BM = \Gamma N$. Αν Δ είναι η προβολή της B στην AM και E είναι η προβολή της Γ στην AN να δειχθεί ότι το τρίγ. $A\Delta E$ είναι ισοσκελές
42. Δίνεται μια οξεία γωνία $\hat{\chi\hat{O}\psi}$ με διχοτόμο την $O\delta$. Από τυχόν σημείο M της διχοτόμου φέρνουμε $MA \perp O\chi$, $MB \perp O\psi$. Αν η MB τέμνει την $O\chi$ στο Γ και η MA την $O\psi$ στο Δ , να δειχθεί ότι : α) $MA = MB$, β) $A\Gamma = B\Delta$.
43. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές του $AB, A\Gamma$ προς τα B και Γ . Στις προεκτάσεις παίρνουμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Φέρνουμε τις αποστάσεις $\Delta Z, E\Lambda$ από την $B\Gamma$.
Να δειχθεί ότι α) $AZ = A\Lambda$ β) Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$

44. Δίνονται δυο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $AB=\Delta E$, $\hat{A}=\hat{\Delta}$ και τα ύψη AK και $\Delta\Lambda$ είναι ίσα, ναδειχθεί ότι τα τρίγωνα είναι ίσα
45. Στη διχοτόμο $O\delta$ γωνίας $\hat{\chi O\psi}$ παίρνουμε σημεία A, B . Αν $B\Gamma, B\Delta$ οι αποστάσεις του B από τις πλευρές της γωνίας να αποδειχθεί ότι : $A\Gamma=A\Delta$, και $\hat{\Gamma A B}=\hat{\Delta A B}$.
46. Στις προεκτάσεις της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγ. $AB\Gamma$ παίρνουμε τμήματα $B\Delta= \Gamma E$. Φέρνουμε τα ύψη $\Delta Z, EH$ των τριγ. , $AB\Delta$ και $A\Gamma E$. Να δειχθεί ότι :
α) $\hat{A B \Delta}=\hat{A \Gamma E}$, β) το AZH είναι ισοσκελές.
47. Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ έτσι ώστε $AB=\Delta\Gamma$, $A\Gamma=\Delta B$ και τις κορυφές A, Δ "εκατέρωθεν" της $B\Gamma$. Φέρνουμε τα ύψη τους AE και ΔZ . Να δειχθεί ότι $AZ=\Delta E$ και $\hat{A Z \Delta}=\hat{A E \Delta}$.

48. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) φέρνουμε $B\Delta, \Gamma E$ τις διχοτόμους. Αν $\Delta K, E\Lambda$, κάθετες στη $B\Gamma$ να δειχθεί ότι : α) $\Delta K=E\Lambda$, β) το $AK\Lambda$ είναι ισοσκελές.

49. Δίνεται το διπλανό σχήμα:

I. Να συμπληρώσετε τα κενά σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Το Δ είναι η

του A στην

β. Το $A\Delta$ είναι το

του τριγώνου $AB\Gamma$

γ. Οι αποστάσεις των A, E, Z από την $B\Gamma$ είναι τα,, αντίστοιχα.

II. Να αποδειχθεί ότι τα A, E, Z ισαπέχουν από την $B\Gamma$

